Биллиарды и упругие столкновения частиц и шаров

Г. А. Гальперин

I. Введение

Одной из важных и интересных задач физики, а точнее, кинетической теории идеальных газов, является исследование движения молекул газа в сосуде или пространстве. При этом молекулы можно представлять себе как упругие шарики одинаковой массы (если газ однородный) или различных масс (если сосуд заполнен разными видами газа); эти шарики летают с постоянными, но как правило, различными скоростями вдоль прямых, а при столкновениях мгновенно меняют свои скорости согласно законам упругого столкновения, после чего продолжают двигаться по новым прямым, пока не произойдут очередные столкновения. В результате многократных соударений молекулы «перемешаются», и если их много, то после продолжительного времени их движение будет казаться хаотическим, давление в сосуде выравняется («закон Паскаля»), в газе установится определенная «температура» (средняя кинетическая энергия молекулы), «плотность» газа будет постоянной и т. д. Все описанные (а также пропущенные здесь) характеристики идеального газа хорошо известны в физике, многие из них исследованы также чисто математически, как правило, с привлечением теории вероятностей и ее модной (с середины 50-х годов XX века и по настоящее время) ветви — эргодической теории. Грубо говоря, «математическое исследование» газа состоит в точном определении физических понятий «давление», «температура», «перемешивание» и т. д., а затем в строгом решении математических задач, связанных с этими понятиями, в создании соответствующей математической теории, в объяснении (=математическом доказательстве) известных формул и получении новых, и т. д. В этом направлении сейчас работают десятки, если не сотни, математиков из разных стран мира. Ключевыми словами в их исследованиях являются «хаос» (изучаемый эргодической теорией) и «биллиард» (геометрическая часть той же теории). Здесь следует заметить, что «хаос» и «биллиард» — взаимопроникающие и переплетающиеся понятия: «биллиард» изучает детерминированное поведение системы; это поведение с течением времени становится почти неотличимым от хаотического, и тогда, на последнем этапе, можно забыть про детерминированность и исследовать один только «хаос». «Хаос» очень сложная вещь, и здесь мы затронем только «детерминированную» часть поведения системы.

Цель настоящей статьи — объяснить, как задача о столкновении шариков сводится к биллиарду, т. е. к задаче о равномерном движении *одной* частицы и ее биллиардному отражению от различных поверхностей (правда, в многомерном пространстве). После этого мы расскажем о замечательной задаче Я. Г. Синая — о числе соударений между молекулами газа и ее биллиардных модификациях, и опишем затем различные подходы к ее решению.

II. Немного истории: постановка задач и результаты

1. Три пространства: конфигурационное, «скоростное» и фазовое

Идея заменять поведение сложной механической системы движением одной точки хотя и очень нетривиальна, но довольно стара — ее использовал в своих исследованиях великий физик Людвиг Больцман почти 200 лет назад (в 1872 г. Больцман написал свое знаменитое «уравнение Больцмана», связывающее давление газа и температуру с помощью константы Больцмана k_B (см., например, [6])).

Рассмотрим простой пример: n частиц движутся каким-то образом (пока что без всякого закона) в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Каждая частица имеет три координаты (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, n$, меняющиеся во времени t. Заменим теперь эти n частиц на одну «многомерную» точку

$$\boldsymbol{x} = (x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \ldots; x_n, y_n, z_n),$$

движущуюся в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$. Движение точки $\boldsymbol{x}$ состоит в том, что в каждый момент времени t известны все ее $3n$ координат — они определяются координатами исходных частиц в момент времени t — так что известна и вся траектория точки $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{3n}$. А если известны конкретны законы движения частиц, т. е. функции $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$, то известен и закон движения «многомерной» частицы $\boldsymbol{x}(t)$. Во многих случаях следить за точкой $\boldsymbol{x}(t)$ легче, чем сразу за большим число м исходных частиц. Однако эта простота кажущаяся — уменьшая число частиц до одной, нам приходится увеличивать «высокомерие» пространства. Пространство $\mathbb{R}^{3n}$, в котором движется точка $\boldsymbol{x}(t)$, называется *конфигурационным*. Однако и его можно расширить, заменив конфигурационную точку $\boldsymbol{x}(t)$ на *фазовую* точку $\boldsymbol{z}(t)$, координаты которой — не только положения частиц в пространстве $\mathbb{R}^3$, но и их скорости (v_{ix}, v_{iy}, v_{iz}), $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\boldsymbol{z}(t) = (\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{v}(t)) = (x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}; \ldots; v_{nx}, v_{ny}, v_{nz}).$$

Таким образом, возникает фазовое пространство $\mathbb{R}^{6n}$, фазовая точка которого описывает движение (траекторию) исходной системы в $\mathbb{R}^3$ целиком и полностью (в отличие от конфигурационной точки $\boldsymbol{x}(t)$, описывающей лишь пространственное положение частиц — без их скоростей). Фазовое пространство есть прямая сумма двух подпространств — конфигурационного $\mathbb{R}^{3n}_{\boldsymbol{x}}$ и пространства скоростей $\mathbb{R}^{3n}_{\boldsymbol{v}}$: $\mathbb{R}^{6n}_{\boldsymbol{z}} = \mathbb{R}^{3n}_{\boldsymbol{x}} \oplus \mathbb{R}^{3n}_{\boldsymbol{v}}$. Иногда бывает проще и нагляднее исследовать проекцию точки $\boldsymbol{z}(t)$ на $\mathbb{R}^{3n}_{\boldsymbol{x}}$ и/или на $\mathbb{R}^{3n}_{\boldsymbol{v}}$ по отдельности, вместо того, чтобы описывать намного более сложное поведение фазовой точки $\boldsymbol{z}(t)$ во всем $\mathbb{R}^{6n}$.

Следует отметить, что, как правило, фазовой (а также конфигурационной и «скоростной») точки осуществляется е во всем «пустом» пространстве $\mathbb{R}^{6n}_{\boldsymbol{z}}$ — ограничения, накладываемые на систему различными физическими законами, индуцируют геометрические препятствия (в виде поверхностей) в $\mathbb{R}^{6n}_{\boldsymbol{z}}$ (равно как и в $\mathbb{R}^{3n}_{\boldsymbol{x}}$, и в $\mathbb{R}^{3n}_{\boldsymbol{v}}$, соответственно).

Например, если исходные частицы в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеют одинаковую массу 1 и их движение подчиняется закону сохранения энергии:

$$\boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_2^2 + \ldots + \boldsymbol{v}_n^2 = \mathrm{const} \quad \Longleftrightarrow \quad v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2 + \ldots + v_{nx}^2 + v_{ny}^2 + v_{nz}^2 = \mathrm{const},$$

то проекция траектории точки $\boldsymbol{z}$ в $\mathbb{R}_{\boldsymbol{z}}^{6n}$ на пространство $\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{3n}$ представляет собой кривую, лежащую на $(3n-1)$-мерной сфере радиуса $\sqrt{\mathrm{const}}$. Эта сфера и ограничивает движение точки $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}_{\boldsymbol{z}}^{6n}$.

Другой важный для нас пример: два одинаковых шара в пространстве $\mathbb{R}^3$. Каждый шар задается координатами своего центра и радиусом r. Если бы шары были прозрачными и проходили друг сквозь друга без препятствий, то их конфигурационным пространством оказалось бы все пространство $\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{3\cdot 2} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^6$. Однако шары непрозрачны и расстояние между их центрами всегда больше или равно $2r$:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \geqslant (2r)^2 \tag{1}$$

Неравенство (1) задает внешнюю часть цилиндра *Ц* в 6-мерном пространстве, наклоненного под 45° к горизонтали. (Если ограничиться слева в формуле (1) только первым слагаемым и заменить знак неравенства знаком равенства, то мы получим полосу на плоскости Ox_1x_2 между прямыми $x_2 = x_1 - r$ и $x_2 = x_1 + 2r$ — одномерный цилиндр, см. рис. 1).

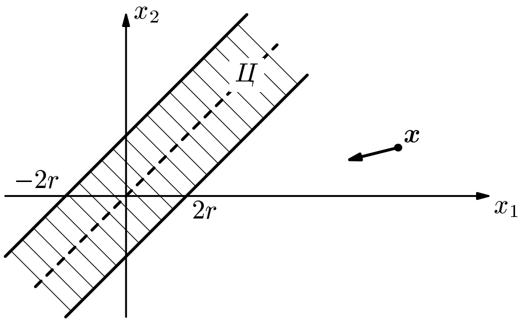


Рис. 1. *Одномерный цилиндр Ц*

Таким образом, конфигурационная точка $\boldsymbol{x}$ может двигаться только лишь в части пространства $\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^6$ — вне цилиндра *Ц*. Попадание точки $\boldsymbol{x}$ на цилиндр означает столкновение шаров.

В дальнейшем под конфигурационным, «скоростным» и фазовым пространствами мы будем иметь в виду только множество *возможных* положений соответствующей точки в $\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}^{3n}$, $\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{3n}$ или $\mathbb{R}_{\boldsymbol{z}}^{6n}$. Описание этих пространств для специальных систем будет дано в следующем разделе.

2. Биллиард

Пусть точка $\boldsymbol{x}$ движется равномерно и прямолинейно в пространстве $\mathbb{R}^n$; положим скорость ее движения равной 1: $\|\boldsymbol{v}\| = \left\|\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right\| = 1$. Если в $\mathbb{R}^n$ имеется плоскость Π размерности $n-1$, то пусть точка $\boldsymbol{x}$ отражается от нее по закону геометрической оптики: *угол отражения равен углу падения*. Или иначе: разложим скорость $\boldsymbol{v}^-$ точки $\boldsymbol{x}$ до отражения на две составляющие, одна из которых, $\boldsymbol{v}_\perp^-$, перпендикулярна плоскости Π, а вторая ей параллельна: $\boldsymbol{v}_\parallel^- = \boldsymbol{v}^- - \boldsymbol{v}_\perp^-$. При отражении от Π параллельная составляющая $\boldsymbol{v}_\parallel^-$ не меняется, а перпендикулярная меняет знак: $\boldsymbol{v}_\parallel^+ = \boldsymbol{v}_\parallel^-$, $\boldsymbol{v}_\perp^+ = -\boldsymbol{v}_\perp^-$. Новая скорость частицы (после отражения) равна

$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}_\parallel^+ + \boldsymbol{v}_\perp^+ = \boldsymbol{v}_\parallel^- - \boldsymbol{v}_\perp^-.$$

Или, наконец, закон отражения может быть записан в виде векторной формулы

$$\boldsymbol{v}^+ = \boldsymbol{v}^- - 2 \cdot (\boldsymbol{v}^-, \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n}, \tag{2}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$, а $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к плоскости Π.

Возвращаясь к первоначальному закону геометрической оптики, опишем его чуть более подробно. Возьмем падающий луч света (точка $\boldsymbol{x}$ приближается к Π) и отраженный (точка $\boldsymbol{x}$ удаляется от Π). Через них проходит единственная двумерная плоскость π (если размерность пространства $\mathbb{R}^n$ больше 2; в случае $n=2$ это сама плоскость $\mathbb{R}^n$). В этой же плоскости расположен также и вектор $\boldsymbol{n}$ нормали к отражающей $(n-1)$-мерной плоскости Π (который берется в точке отражения). Тогда *угол падения* α — это угол между падающим лучом света и вектором $\boldsymbol{n}$ (или иначе, угол между векторами $(-\boldsymbol{v}^-)$ и $\boldsymbol{n}$), а *угол отражения* β — это угол между отраженным лучом и вектором $\boldsymbol{n}$ (т. е. угол между векторами $\boldsymbol{v}^+$ и $\boldsymbol{n}$). Закон оптики гласит: $\boxed{\alpha = \beta}$ (рис. 2). Он также называется *биллиардным* законом.

Легко видеть, что все три описания биллиардного отображения точки $\boldsymbol{x}$ от плоскости Π эквивалентны.

Опишем теперь биллиардное отражение точки $\boldsymbol{x}$ от гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$. Проведем к S в точке отражения касательную $(n-1)$-мерную плоскость Π и будем считать, что точка $\boldsymbol{x}$ отражается от Π по описанному выше правилу. Это и есть биллиардный закон отражения от S. Если точка $\boldsymbol{x}$ отражается по этому закону от нескольких гладких $(n-1)$-мерных поверхностей (по отдельности) в пространстве $\mathbb{R}^n$, то мы будем говорить, что движение $\boldsymbol{x}$ биллиардное, а сама

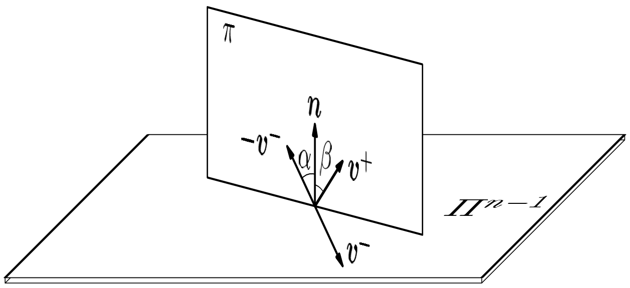


Рис. 2. *Биллиардный закон:* $\alpha = \beta$

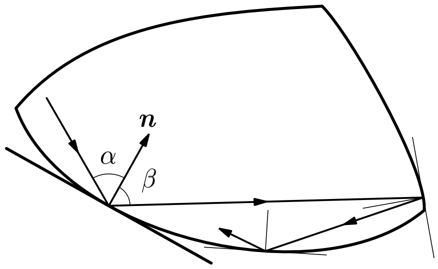


Рис. 3. *Биллиардный стол и биллиардная траектория*

точка $\boldsymbol{x}$ движется по биллиардной траектории в области пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченной этими поверхностями. Поверхности отражения для краткости будем называть *стенками*, область, в которой движется точка $\boldsymbol{x}$ — (многомерным) *биллиардным столом*, а все движение $\boldsymbol{x}$ — *биллиардом* (рис. 3). Саму точку $\boldsymbol{x}$ назовем *биллиардной частицей*.

Напомним, что по определению скорость биллиардной частицы всегда равна 1: $\|\boldsymbol{v}\| = 1$. Отметим также, что если биллиардная частица попадает на пересечение двух или большего числа стенок, то ее движение после этого не определено (так как размерность пересечения стенок $\leqslant n-2$, и касательная $(n-1)$-мерная плоскость Π не определена однозначно). Мы будем считать в этом случае, что траектория частицы в такой точке обрывается. Мера множества начальных положений частицы, для которых траектория не определена (обрывается), равна 0, и такими траекториями мы будем пренебрегать. Таким образом, биллиардные траектории — только те, точки излома которых не принадлежат сразу нескольким стенкам биллиардного стола.

3. Задача Синая о столкновении одинаковых шаров

Примерно в середине 1960-х годов Я. Г. Синай, занимаясь доказательством эргодичности однородного газа молекул в сосуде, поставил следующие вопросы. Пусть молекулы газа (шарики) летают в неограниченном пустом пространстве и упруго сталкиваются между собой. Шарики предполагаются одинаковыми (однородный газ), их число — конечным, а упругое соударение означает, что в момент удара скорости столкнувшихся шариков перераспределяются согласно закону сохранения импульса (количества движения) и энергии (точные формулы будут выписаны в следующем разделе).

1) Могут ли столкновения в такой системе продолжаться неограниченно долго?

2) Может ли число ударов в системе за *конечный* промежуток времени оказаться бесконечным?

3) Какое наибольшее число ударов может произойти между молекулами, если разрешается произвольно менять их начальные положения и скорости (при условии, что ответы на оба предыдущих вопроса отрицательны)?

Эти вопросы возникли у Я. Г. Синая естественным образом во время его исследования стохастических свойств газа молекул и создания им теории гиперболических биллиардов (которые называются также рассеивающими или биллиардами Синая, см. фундаментальную работу Я. Г. Синая [8]). Дело в том, что, как мы покажем в следующей части, конфигурационным пространством системы шариков является многомерное евклидово пространство, из которого выкинуто много цилиндров типа (1), где знак неравенства $\geqslant$ заменен на противоположный знак $\leqslant$, (т. е. из пространства выкинуты цилиндры и их внутренности), а движение конфигурационной точки $\boldsymbol{v}(t)$ подчиняется биллиардному закону (2). Иными словами, газ одинаковых молекул в исходном трехмерном пространстве есть не что иное, как биллиард Синая в пространстве большой размерности: стенки биллиарда (поверхности выкинутых цилиндров) «вдавлены» внутрь многомерного биллиардного стола — а это одно из требований на геометрию биллиарда Синая.

Сделаем оговорку: 6-мерный цилиндр (1) задает во всем пространстве $\mathbb{R}^{3n}$ другой цилиндр $C = Ц \times \mathbb{R}^{3n-6}$, но граница у C уже в основном плоская, лишь по некоторым направлениям ее кривизна отлична от нуля. Так что возникающий биллиард — не строго рассеивающий, а полурассеивающий. Однако в работе [8] все трудности, связанные с «полурассеиванием» (т. е. с плоскими участками границы) также были с успехом преодолены.

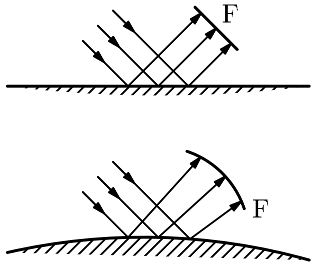


Рис. 4. *Волновой фронт отраженных лучей*

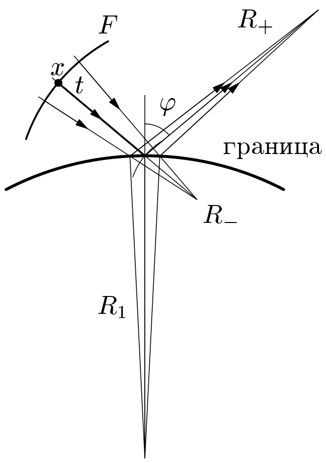


Рис. 5. *К выводу уравнения зеркального отражения*

Итак, газ молекул сводится к биллиарду Синая описанного выше типа. Зачем же нужно знать, конечно или бесконечно число соударений в системе шариков, или, что то же самое, в изоморфном этой системе биллиарде?

Здесь мы можем дать ответ на этот вопрос лишь очень приближенно, оставляя основные идеи теории гиперболических биллиардов, кроме одной, за скобками. А эту одну идею продемонстрируем для двумерного случая.

Когда параллельный пучок «биллиардных» (или световых) лучей падает на плоский участок границы, он после отражения остается параллельным. Но если участок границы выпукл по отношению к параллельному пучку света, то этот пучок после отражения рассеется и волновой фронт F (поверхность, перпендикулярная отраженным лучам) будет криволинейным (рис. 4). (По этой причине биллиард и называется рассеивающим).

Как меняется кривизна фронта F при его движении в пространстве после каждого отражения от выпуклого участка границы?

Обратим время, т. е. запустим фронт F (вместе с пучком) в обратную сторону (см. рис. 5). Пусть $x \in F$ и пусть фронт F движется до границы отражения время t_1. Тогда

$$R(x) = t_1 + R_-, \tag{3}$$

где $R(x)$ — радиус кривизны фронта в точке x, t_1 — расстояние, которое проходит точка x до границы, R_- — радиус кривизны фронта в точке отражения (**до** отражения пучка от границы), R_+ — радиус кривизны фронта в точке отражения (**после** отражения пучка). Из геометрической оптики известна следующая элегантная связь радиусов R_-, R_+ и R_1:

$$\frac{1}{R_-} = \frac{1}{R_+} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{2}{\cos\varphi_1}\,, \tag{4}$$

где φ_1 — угол отражения в точке отражения; эта формула называется *уравнением зеркального отражения.* Обратные величины к радиусам — это кривизны, так что короче равенство (4) переписывается в терминах кривизн $\chi_\pm = 1/R_\pm$, $K_1 = 1/R_1$:

$$\chi_- = \chi_+ + K_1 \cdot \frac{2}{\cos\varphi_1}\,. \tag{5}$$

Из (3) получаем $\chi(x) = \dfrac{1}{R(x)} = \dfrac{1}{t_1 + R_-} = \dfrac{1}{t_1 + \dfrac{1}{\chi_-}}$, откуда, используя (5), находим

$$\chi(x) = \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{\cfrac{2K_1}{\cos\varphi_1} + \chi_+}}\,. \tag{6}$$

Итак, формула (6) дает нам кривизну фронта в точке $x \in F$ после *одного* отражения от границы. Если же отражений было два, то мы должны принять кривизну $\chi_+ = \chi_+^{(1)}$ за кривизну фронта в некоторой другой его точке y и заменить ее аналогичным выражением по формуле (6), только теперь все индексы сменятся с 1 на 2. В результате будем иметь формулу (7):

$$\chi(x) = \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{\cfrac{2K_1}{\cos\varphi_1} + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{\cfrac{2K_2}{\cos\varphi_2} + \chi_+^{(2)}}}}}\,. \tag{7}$$

Продолжая итерировать, получим цепную дробь

$$\chi(x) = \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{\cfrac{2K_1}{\cos\varphi_1} + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{\cfrac{2K_2}{\cos\varphi_2} + \cfrac{1}{t_3 + \ldots}}}}}\,, \tag{8}$$

где многоточие следует заменить на аналогичные выражения столько раз, сколько имеется отражений точки при ее прямом движении во времени, прежде чем она попадет в x. Заметим, что мы начинали с параллельного пучка, которому отвечает $\chi_+ = 0$. Допустим теперь, что $\chi_+^{(i)} \to 0$ при $i \to \infty$, т. е. что лучи становятся почти параллельными после бесконечного числа отражений. Тогда получаем бесконечную цепную дробь. В рассуждениях Я. Г. Синая важно, чтобы эта дробь сходилась — тогда будет определена кривизна $\chi(x)$ в точке x. В теории цепных дробей критерий сходимости бесконечной цепной дроби.

Критерий сходимости цепной дроби (Seidel – Sterne). *Бесконечная цепная дробь*

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots}}}, \quad a_i>0,\ i=1,2,\dots,$$

сходится тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i=\infty.$$

(См., например, [11].)

Итак, для существования кривизны $\chi(x)$ *необходимо*, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(t_i+\frac{2K_i}{\cos\varphi_i}\right)=\infty.$$

А для этого *достаточно*, чтобы $\sum_{i=1}^{\infty} t_i=\infty$ (поскольку $2K_i/\cos\varphi_i>0$ при всех i). Аналогичные рассуждения, только намного более технические, работают и в многомерном случае.

Если число ударов в системе шаров на любом конечном интервале времени конечно, то этого достаточно для расходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} t_i$ и, тем самым, для сходимости цепной дроби (8). Вот почему достаточно ответить только на второй вопрос Я. Г. Синая; но первый и третий вопросы интересны сами по себе, и, кроме того, ответив на любой из них, мы одновременно смогли бы ответить также и на второй вопрос.

Я. Г. Синай поставил и решил задачу о столкновениях *одинаковых* шаров своей (к сожалению, так и не опубликованной) рукописи [9]. А именно, он доказал, что если число шаров фиксировано, то существует такая константа C, что число соударений между этими шарами в пустом пространстве меньше C, *независимо* от начального состояния системы, т. е. от положений и скоростей шаров в нулевой момент времени.

Из этого результата вытекает отрицательный ответ на вопрос 2), играющий фундаментальную роль в сходимости цепной дроби (8). Этот ответ стал одним из ключевых моментов в доказательстве Я. Г. Синая эргодичности однородного газа молекул в сосуде.

4. Столкновения трех одинаковых шаров

Приведем любопытный и довольно тонкий результат о столкновениях *трех* одинаковых шаров в пространстве, известный как «гипотеза Уленбека». В работе американских физиков (Sandri, Sullivan, Norem [18]) 1964-го года была численно просчитана система из трех одинаковых шаров, и оказалось, что при рассмотренных ими начальных положениях и скоростях шаров, число столкновений между шарами не превосходит 4: четыре столкновения могут произойти, а пять и больше — не могут!

Этот результат был также независимо анонсирован в 1964 г. в работе Thurston'a и Sandri [19]. Строгое его доказательство появилось не очень давно: в 1993 г. американские химик T. J. Murphy и физик E. G. D. Cohen в совместной работе [16] доказали, что *возможны только* следующие столкновения в системе одинаковых шаров 1, 2 и 3:

I.	a)	(12)	(одинарный удар)
	b)	(12)(23)	(два удара)
	c1)	(12)(23)(31)	(три удара)
	c2)	(12)(23)(12)	(три удара)
	d1)	(12)(23)(12)(13)	(четыре удара)
	d2)	(12)(23)(13)(23)	(четыре удара)

и *невозможны* такие теоретически мыслимые столкновения:

II.	e1)	(12)(23)(12)(23)	(четыре удара)
	e2)	(12)(23)(13)(12)	(четыре удара)
	f1)	(12)(23)(12)(13)(12)	(пять ударов)
	f2)	(12)(23)(13)(23)(12)	(пять ударов).

Отметим, что подобрать начальные условия в системе с четырьмя ударами d1) или d2) очень непросто; а доказательство невозможности четырех столкновений e1) и e2), а также пяти столкновений f1) и f2) легко влечет доказательство невозможности 6, 7, 8,... ударов в системе из трех одинаковых шаров (поскольку любая последовательность из 6 ударов содержит одну из последовательностей f1), f2), e1), e2). T. Murphy и E. Cohen отмечают, что доказательство невозможности ударов типа II в очень кратком виде были ранее даны E. Cohen'ом в работе [14] 1966 года, и что утверждение про $\leqslant 4$ столкновений верно также в пространстве любого числа измерений $n > 3$.

Задача про точную верхнюю оценку числа столкновений в системе из четырех или более одинаковых шаров никем не исследовалась.

5. «Малая» и «большая» биллиардные задачи Я. Г. Синая

Напрашивающееся обобщение задачи Я. Г. Синая об упругом столкновении *одинаковых* шаров состоит в рассмотрении шаров *произвольных* радиусов r_1, $r_2, \ldots, r_N$ и произвольных масс $m_1, m_2, \ldots, m_N$, летающих и упруго сталкивающихся в пустом пространстве $\mathbb{R}^n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Эта задача была поставлена Я. Г. Синаем в середине 1970-х годов на научном семинаре по динамическим системам под руководством В. М. Алексеева и Я. Г. Синая.

Имеется существенное отличие «одномерного газа молекул» ($n = 1$) от «многомерного газа» ($n \geqslant 2$): в то время как в одномерной системе шар $\#i$ может сталкиваться с шарами $\#(i-1)$ и $\#(i+1)$, в многомерном газе априори нет ограничений для столкновения шаров $\#i$ и $\#k$ с $|i-k| \geqslant 2$. (Такие ограничения могут появиться лишь в результате скрупулезного изучения системы, когда, как это было в случае трех одинаковых шаров, обнаруживается, что не всякие последовательности ударов осуществимы.) Одномерная система шаров (вернее, стрежней на прямой) может быть редуцирована к системе точечных упругих *частиц* на прямой (когда все радиусы $r_i = 0$), в то время как в случае дисков на плоскости ($n = 2$) или шаров в пространстве ($n \geqslant 3$) такой редукции сделать нельзя.

Напомним, что мы исключаем из рассмотрения такие события, как более чем двойные столкновения (частиц, дисков или шаров), а также одновременные двойные столкновения более чем двух шаров: эти события происходят с вероятностью 0.

В следующем разделе будут описаны конфигурационные пространства (a) системы N частиц на прямой $\mathbb{R}^1$ и (b) системы N дисков на плоскости $\mathbb{R}^2$ или N шаров в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Они качественно различны: если в случае (a) конфигурационным пространством является многогранный угол специального вида в пространстве $\mathbb{R}^N$, то в случае (b) конфигурационное пространство — это пространство $\mathbb{R}^{Nn}$, из которого выкинута довольно замысловатая система из $\binom{n}{2}$ цилиндров (и их внутренностей), причем все цилиндры имеют общее непустое пересечение. В общем случае, когда радиусы $r_1, r_2, \ldots, r_N$ и массы $m_1, m_2, \ldots, m_N$ различны, конфигурационная точка $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^{Nn}$ движется между столкновениями со стенками — гранями угла или цилиндрами — вдоль прямых (как это и было раньше, когда все шары были одинаковыми), но ее отражения от стенок уже вовсе не биллиардные!

Тем не менее, сделав довольно простое — линейное! — преобразование пространства $\mathbb{R}^{Nn}$, Я. Г. Синай сумел свести задачу движения точки $\boldsymbol{x}(t)$ к задаче о биллиардном движении новой точки $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ в преобразованном конфигурационном пространстве.

Таким образом, общая задача о шарах разных размеров и масс также сводится к биллиарду.

После такого свед*е́*ния Я. Г. Синай сделал два естественных допущения: в задаче (a) про частицы он отказался от специального вида многогранного угла и рассмотрел биллиард в произвольном многогранном угле в пространстве $\mathbb{R}^N$, а в задаче (b) он заменил цилиндры в многомерном пространстве на конечное множество произвольных выпуклых тел в $\mathbb{R}^K$ (где K не обязательно равно nN) с таким свойством: границы тел гладкие и *все эти тела имеют непустое пересечение*, а конфигурационная точка $\boldsymbol{z}(t)$ отражается от границ этих тел (стенок) по биллиардному закону. Отличие задачи (a) от (b) в том, что в задаче (a) такими выпуклыми телами служат полупространства, и биллиардное движение можно исследовать более или менее элементарными методами, а в задаче (b) у стенок имеются кривизны, которые создают рассеяние при отражении от них, и исследование становится намного более сложным. Задачу (b) тоже можно рассматривать как биллиард в многогранном угле, но со «вдавленными внутрь» стенками (рис. 6). Я назвал задачи (a) и (b) «малой» и «большой» биллиардными задачами потому, что это фактически одна и та же задача — о биллиарде в угле, только в «малой» задаче угол этот — обычный многогранный, с плоскими гранями, а в «большой» задаче грани — стенки многогранного угла — выпуклы внутрь него, и это обстоятельство (выпуклость стенок) создает «нелинейные» трудности при ее решении. Приведем точные формулировки биллиардных задач Я. Г. Синая.

«Малая» задача Синая. Доказать или опровергнуть, что в любом многогранном угле в $\mathbb{R}^n$ с плоскими стенками число отражений биллиардной частицы от его стенок (i) конечно, и (ii) это число не превосходит некоторой константы C_1,

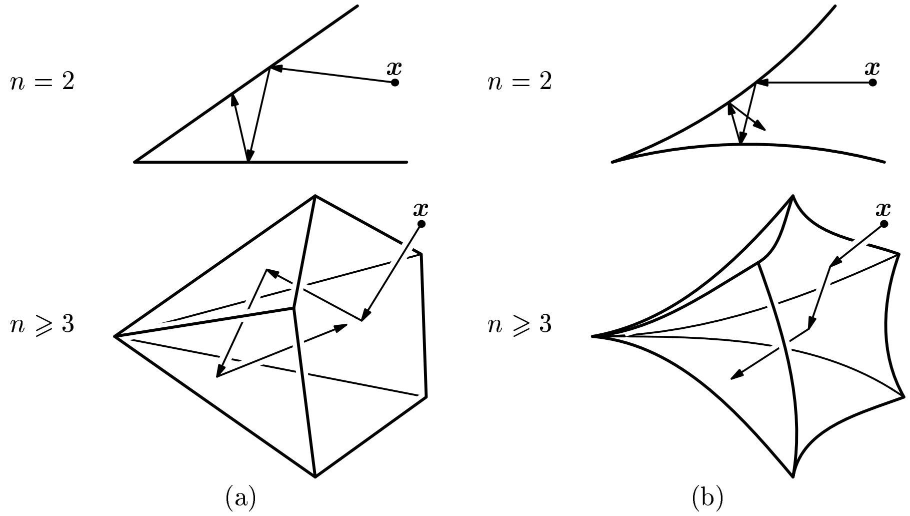


Рис. 6. *«Малая» (a) и «большая» (b) задачи Синая*

зависящей только от геометрии угла, но не от начальных условий — положения и направления скорости частицы (рис. 6a).

«Большая» задача Синая. Доказать или опровергнуть, что в любом «криволинейном» угле с гладкими стенками, выпуклыми внутрь угла (стенки — границы выпуклых тел, имеющих в совокупности непустое пересечение) число отражений от его стенок (i) конечно, и (ii) при некоторых ограничениях на геометрию угла не превосходит некоторой константы C_2, зависящей только от геометрии угла, но не от начальных условий, накладываемых на биллиардную частицу (начального положения и скорости).

Под «некоторыми ограничениями на геометрию криволинейного угла» Я. Г. Синай имел в виду похожесть его на «плоский» угол, а именно: грани криволинейного угла должны быть трансверсальными, т. е. не иметь общей касательной.

6. Задача Синая о столкновениях произвольных шаров в пространстве

Одновременно с формулировками «малой» и «большой» биллиардных задач Я. Г. Синай сформулировал и их «динамические» аналоги.

Задача о частицах на прямой. Доказать или опровергнуть, что число столкновений в системе N частиц произвольных масс $m_1, \ldots, m_N$, движущихся на бесконечной прямой (i) конечно и (ii) это число не превосходит некоторой константы $C_1 = C_1(m_1, \ldots, m_N)$, зависящей только от масс, но не от начальных положений частиц и их скоростей. Выяснить характер функции $C_1 = C_1(m_1, \ldots, m_N)$.

Задача о шарах. Доказать или опровергнуть, что число столкновений N шаров (N дисков в случае плоскости) произвольных ненулевых радиусов $r_1, \ldots, r_N$

и масс $m_1, \ldots, m_N$, сталкивающихся в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, (i) конечно и (ii) это число не превосходит некоторой константы $C_2 = C_2(r_1, \ldots, r_N, m_1, \ldots, m_N)$, зависящей только от радиусов и масс шаров, но не от начальных положений шаров и их скоростей. Выяснить характер функции $C_2 = C_2(r_1, \ldots, r_N, m_1, \ldots, m_N)$.

Биллиардные задачи Я. Г. Синая и его задачи о частицах и шарах привлекли внимание многих математиков; их решение заняло почти тридцать лет — с середины 1970-х годов и до конца XX века.

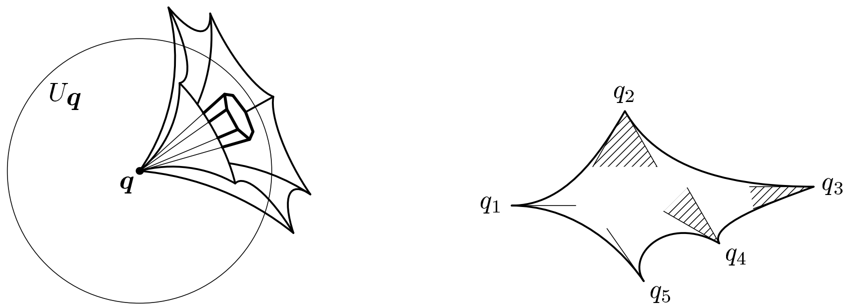
7. Результаты исследований

7.1. «Малая» задача Синая

«Малая» задача была решена положительно независимо и разными методами тремя математиками. Первым ее полностью решил в 1978 г. сам Я. Г. Синай в работе [10], доказав индукцией по размерности конфигурационного пространства существование равномерной оценки C_1 для числа ударов. Фактически это доказательство неявно содержалось уже в его неопубликованной рукописи [9] о столкновениях *одинаковых* шаров. В этой рукописи, помимо большого числа тонких рассуждений, вводится одно важное понятие: «*открытая точка края*». Грубо говоря, если точка $\boldsymbol{q}$ принадлежит сразу нескольким стенкам многомерного биллиарда, причем стенки *выпуклы внутрь* стола, как на рис. 6b), и в эту точку можно — в какой-нибудь ее малой окрестности $U_{\boldsymbol{q}}$ — вставить плоский ненулевой многогранный угол (как на рис. 6a) с вершиной $\boldsymbol{q}$ (точнее — окрестность вершины многогранного угла), то точка $\boldsymbol{q}$ называется открытой точкой края. Точнее, для открытой точки края $\boldsymbol{q}$ многогранный угол

$$Q_{\boldsymbol{q}} = \{\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i\; (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}_i) > 0\} \tag{9}$$

не лежит в $(n-1)$-мерной плоскости; здесь $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_k$ — единичные векторы нормалей ко всем стенкам биллиарда в их общей точке $\boldsymbol{q}$, направленные внутрь биллиардного стола. На рис. 7a) указана открытая точка края $\boldsymbol{q}$ — вершина криволинейного угла, в который (в малой окрестности $U_{\boldsymbol{q}}$) вставлен ненулевой



a) Открытая точка края $\boldsymbol{q}$

b) q_2, q_3, q_4 — открытые, q_1, q_5 — неоткрытые точки края

Рис. 7.

плоский многогранный угол. Открытыми точками края являются также точки q_2, q_3 и q_4 плоского «биллиарда Синая» на рис. 7b), а вершины q_1 и q_5 того же биллиарда не открытыми точками не являются. Идея Я. Г. Синая состояла в том, что если максимальное число ударов биллиардной частицы в плоском многогранном угле с вершиной $\boldsymbol{q}$ не превосходит константы C_1, то в многогранном *криволинейном* угле с той же вершиной $\boldsymbol{q}$, полученном из плоского угла «вдавливанием» его граней внутрь (при этом стенки угла становятся гладкими поверхностями в регулярных точках) число ударов не будет превосходить kC_1, где $k \geqslant 1$, поскольку вдавленные внутрь стенки могут лишь либо уменьшить общее число ударов, либо увеличить, но не более, чем в некоторое число k раз. Однако технические трудности, возникающие при обосновании этой идеи настолько велики (они в основном связаны с почти касательными отражениями от криволинейных стенок), что решение «большой» задачи не было доведено в рукописи до конца. (О решении «большой» задачи см. ниже.)

Другие два решения «малой» задачи появились после решения Я. Г. Синая с двумя разрывами примерно в 10 лет.

Второе решение, полученное Г. А. Гальпериным в 1986 г., опубликовано в книге [3]. Как и решение Я. Г. Синая, оно проводится индукцией по размерности конфигурационного пространства, однако в рассуждения вовлекается биллиард на $(n-1)$-мерной сфере и наглядные геометрические соображения.

Третье решение получено М. Б. Севрюком в [7]. Оно основано на следующей лемме: если какая-то точка в $\mathbb{R}^n$ отражается относительно конечного числа плоскостей размерности $(n-1)$ и при этом некоторая линейная функция от этой точки строго возрастает при каждом отражении, то число таких отражений конечно и не превосходит универсальной константы, зависящей только от функции и от расположения плоскостей в пространстве, но не зависит от выбора отражаемой точки. Теорема Синая получается после этого с помощью рассмотрения довольно простой специальной линейной функции.

7.2. Задача о частицах на прямой

Положительное решение задачи о частицах есть прямое следствие положительного решения «малой» задачи Синая: движение n частиц моделируется биллиардным движением одной частицы в специальном многогранном угле (с плоскими стенками) в $\mathbb{R}^n$. Его можно рассматривать как *геометрическое* решение задачи о частицах.

В статье г. А. Гальперина [1], появившейся в 1978 г. одновременно с работой [10], было предложено другое, *аналитическое* доказательство конечности числа столкновений упругих частиц на прямой — но без равномерной по начальным условиям оценки. Тем самым, было получено независимое решение задачи (i). Полное аналитическое доказательство части (ii) было впервые дано Г. А. Гальпериным в работе [2, приложение 1], где приведено явное значение для константы $C_1(m_1, \ldots, m_n)$:

$$C_1(m_1, \ldots, m_n) = 2 \cdot \left(8n^2(n-1)\frac{m_{\max}}{m_{\min}}\right)^{n-2}; \tag{10}$$

здесь $m_{\max}$ — максимальная, а $m_{\min}$ — минимальная из масс $m_1, \ldots, m_n$.

Другое, полуаналитическое – полугеометрическое решение дал в 1992 г.

М. Б. Севрюк в упомянутой выше работе [7]. В нем он рассмотрел «скоростное» пространство системы вместо конфигурационного, к которому затем применил свою идею об отражении точки в гиперплоскостях этого пространства. В результате получилось новое доказательство существования равномерной оценки для числа ударов в системе частиц.

Интересно, что для трех частиц m_1, m_2, m_3 на прямой можно явно выписать верхнюю оценку числа ударов между ними, причем эта оценка, в отличие от общей оценки (10) точна:

$$C_1(m_1, m_2, m_3) = \left\lceil \frac{\pi}{\arccos\sqrt{\dfrac{m_1 m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}}} \right\rceil \tag{11}$$

(здесь $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x). Конфигурационным пространством системы $\{m_1, m_2, m_3\}$ является двугранный угол в $\mathbb{R}^3$, линейный угол которого равен $\alpha = \arccos\sqrt{\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)\left(1+\dfrac{m_2}{m_3}\right)}$, а число биллиардных ударов в плоском угле α всегда $\leqslant \lceil \pi/\alpha \rceil$ (см. теорему 2, раздел III).

7.3. «Большая» задача Синая и задача о шарах, часть (i)

Ее решение, как и решение «малой» задачи, было также получено тремя математиками, однако, в отличие от «малой» задачи, не совсем независимо. Л. Н. Вассерштейн и Г. А. Гальперин в 1978 – 1979 гг. исследовали совместно два типа систем частиц в пространстве: (a) центрально отталкивающихся и (b) локально взаимодействующих. Для таких систем они построили аксиоматическую теорию взаимодействия и доказали существование так называемых «левых» и «правых» скоростей (некоторых специальных левых и правых пределов) вида $\lim \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$), а также теорему о распадении системы (b) на невзаимодействующие с некоторого момента времени группы ограниченного размера (кластеры). Эти результаты составили первую часть статей [20] и [2].

Вторые части этих статей посвящены доказательству конечности числа ударов биллиардной частицы в криволинейном многогранном угле на любом конечном интервале времени, а затем доказательству конечности числа ударов в системе твердых шаров на всем бесконечном интервале времени $[0, +\infty)$. Доказательства этих утверждений в обеих статьях совершенно непохожи и основываются на разных геометрических (и физических!) идеях.

Еще одно альтернативное доказательство задачи о шарах дал в 1990 г. канадский математик R. Illner, упростивший доказательство Л. Н. Вассерштейна.

7.4. «Большая» задача Синая и задача о шарах, часть (ii)

Отметим, что ответ на вопрос (ii) в «большой» задаче Синая будет заведомо отрицательным, если опустить слова «при некоторых ограничениях на геометрию угла» в ее формулировке. Действительно, криволинейный угол на плоскости, стороны которого s_1 и s_2 выпуклы навстречу друг другу, но имеют общую касательную t (рис. 8). Если запустить биллиардную частицу параллельно t, то она после *конечного* числа ударов со сторонами s_1 и s_2, согласно теореме Вассерштейна – Гальперина – Иллнера, будет двигаться свободно вдоль прямой,

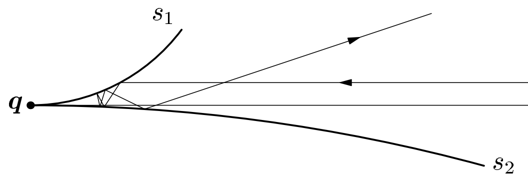


Рис. 8. *Неограниченность количества ударов в «нулевом» угле для траектории, приближающейся к общей касательной к сторонам*

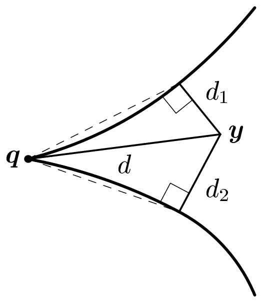
удаляясь от вершины $\boldsymbol{q}$ и больше не соударяясь со сторонами угла. Однако, чем ближе к касательной t мы запустим частицу, тем больше соударений со сторонами угла она совершит, и это число будет стремиться к ∞ при приближении траектории к t. Таким образом, чтобы надеяться на положительный ответ на вопрос (ii) в «большой» задаче Синая, совершенно необходимы «некоторые ограничения на геометрию угла». В двумерном случае криволинейный угол должен быть *ненулевым*, т. е. касательные t_1 и t_2 к сторонам s_1 и s_2 в вершине $\boldsymbol{q}$ должны быть различны; тогда $\angle t_1 t_2 = \alpha \neq 0$. Можно доказать, что как и в случае плоского угла, для криволинейного угла на плоскости максимальное число соударений частицы со сторонами угла $< \lceil \pi/\alpha \rceil$ (см. раздел III, Утверждение). В многомерном случае «ограничением на геометрию угла» может служить открытость всех точек края (см. формулу (9) и рис. 7) или похожее условие. Мы уже отмечали выше, что использование понятия «открытой точки края» в прямом виде ведет к настолько большим техническим трудностям, что практически не позволяет аккуратно доказать верхнюю равномерную оценку на число ударов.

Намного более простым и существенно более эффективным оказалось другое ограничение на геометрию криволинейного угла, так называемая «d/C-близость», введенная Д. Бураго, С. Ферлегером и А. Каноненко в работе [12].

Зафиксируем константу $C > 0$ и для произвольной точки $\boldsymbol{y}$ внутри криволинейного угла найдем все расстояния от нее до стенок угла $\operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, W_k)$, расстояние $\operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, \bigcap_{k=1}^{N} W_k) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{q})$ от $\boldsymbol{y}$ до вершины угла $\boldsymbol{q}$ (т. е. до точки пересечения всех стенок), затем найдем все отношения $\rho_k = \operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, W_k)/\operatorname{dist}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{q})$, $k = 1, \ldots, N$. Криволинейный угол называется *невырожденным с константой* $C > 0$ или C-невырожденным, если для каждого $k = 1, \ldots, N$ и для любой точки $\boldsymbol{y}$ выполнено $\rho_k(\boldsymbol{y}) \geqslant C$. Проще говоря, это означает, что если точка $\boldsymbol{y}$ d-близка ко всем стенкам $W_1, \ldots, W_n$ (т. е. находится на расстоянии $\leqslant d$ от каждой стенки), то она $\dfrac{d}{C}$-близка к пересечению этих стенок (рис. 9). Криволинейный угол называется просто *невырожденным*, если найдутся такие константы $\delta > 0$ и $C > 0$, что в произвольном шаре радиуса δ пересечение этого угла с δ-шаром является C-невырожденным.

Основываясь на таком, «арифметическом» определении невырожденности угла, которое, отметим, эквивалентно невырожденности в смысле Синая, авторы статьи [12] доказали существование универсальной константы C_2, требуемой в «большой» задаче Синая, (ii).

Применяя этот результат к конфигурационному пространству системы шаров, они получили в [12] следующую равномерную оценку для числа ударов меж-



$$\min\left\{\frac{d_1}{d},\dots,\frac{d_N}{d}\right\} \geqslant C$$

Рис. 9. *Невырожденность угла с константой C*

ду шарами во всем пространстве:

$$C_2(r_1,\dots,r_N;m_1,\dots,m_N) = \left(32\sqrt{\frac{m_{\max}}{m_{min}}}\cdot\frac{r_{\max}}{r_{\min}}\cdot N^{3/2}\right)^{N^2}. \qquad (12)$$

Позднее, в работе [13], авторам удалось избавиться от соотношения между радиусами. Они доказали, что при любых радиусах шаров число столкновений в системе шаров во всем пространстве не превосходит универсальной константы $C_2 = C_2(m_1,\dots,m_n)$, которая не зависит от начальных положений и скоростей шаров, а зависит только от их масс:

$$C_2(m_1,\dots,m_N) = \left(400N^2\cdot\frac{m_{\max}}{m_{\min}}\right)^{2N^4}. \qquad (13)$$

Этими исследованиями была поставлена окончательная точка в решении задач Я. Г. Синая. В дальнейшем эти результаты были использованы для изучения системы шаров в сосудах с «вдавленными» внутрь и плоскими стенками.

III. Краткие идеи доказательств

В этом разделе мы, прежде всего, сформулируем точное правило пересчета скоростей частиц и шаров после их столкновения. Затем дадим описание конфигурационного пространства для частиц на прямой и шаров в пространстве. Наконец, сделаем редукцию к биллиардам и сведем задачи про частицы и шары к биллиардным задачам Синая. После этого приступим к изложению идей доказательств теорем, о которых мы рассказывали в части II.

A. Модель удара

Если m_1, m_2 — массы частиц на прямой, v_1, v_2 — их скорости до удара, а u_1, u_2 — скорости после удара, то u_1 и u_2 находятся из двух уравнений, первое из которых выражает закон сохранения импульса, а второе — закон сохранения энергии:

$$\begin{cases} m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2 = \text{const}_1 \ , \\ \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2} = \dfrac{m_1v_1^2}{2} + \dfrac{m_2v_2^2}{2} = \text{const}_2 \ . \end{cases} \tag{14}$$

Для шаров, движущихся до столкновения со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, а после столкновения — со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, следует поступить так. Сначала каждую скорость $\boldsymbol{v}_i$ надо разложить в векторную сумму двух: скорости $\boldsymbol{v}_{i,\parallel}$ вдоль линии центров O_1O_2 и перпендикулярной ей скорости $\boldsymbol{v}_{i,\perp}$ $(i = 1, 2)$, так что $\boldsymbol{v}_{i,\parallel}$ — это ортогональная проекция $\boldsymbol{v}$ на прямую O_1O_2, а $\boldsymbol{v}_{i,\perp} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{i,\parallel}$ (рис 10). После этого шары вдоль направления O_1O_2 следует рассмотреть как сталкивающиеся частицы, применить для их скоростей $\boldsymbol{v}_{1,\parallel}$ и $\boldsymbol{v}_{2,\parallel}$ формулы (14), вычислить величины новых скоростей этих частиц $\boldsymbol{v}_{1,\parallel}$ и $\boldsymbol{v}_{2,\parallel}$, после чего найти скорости после удара:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_{1,\parallel} + \boldsymbol{v}_{1,\perp}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{2,\parallel} + \boldsymbol{v}_{2,\perp}. \tag{15}$$

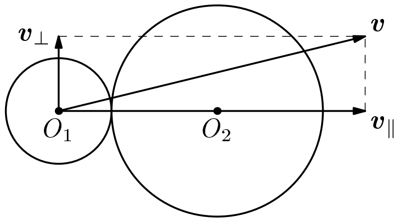


Рис. 10. *Соударение шаров*

Итак, перераспределение скоростей шаров происходит лишь вдоль линии центров, а ортогональные составляющие скорости не меняются. Никакого закручивания шаров также не происходит. Иными словами, мы рассматриваем шары, как «распухшие» частицы. (Конечно, столкновению реальных шаров на биллиардном столе сопутствует вращение, но это происходит в основном из-за наличия трения. Без трения вращение отсутствует, и мы не должны принимать в расчет в нашей модели моменты инерции шаров.)

Интересно, что если шары имеют одинаковую массу, причем один шар покоится, то при центральном ударе (вдоль линии O_1O_2) налетевший шар полностью останавливается, а покоящийся начинает двигаться со скоростью налетевшего; дело происходит так, будто первый шар прошел сквозь второй и они просто обменялись номерами. При нецентральном ударе такая же картина наблюдается для скорости $\boldsymbol{v}_{1,\parallel}$, и поэтому одинаковые шары разлетаются (по теореме Пифагора) под углом 90°. Для шаров разных масс картина разлета намного сложнее.

B. Конфигурационное пространство частиц на прямой

Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_N$ — координаты частиц с массами $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$, сталкивающихся на прямой согласно законам сохранения (14). Конфигурационная точка $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ движется равномерно между соударениями частиц и меняет свою траекторию, если какие-то две соседние частицы m_i и m_{i+1} сталкиваются. В этот момент $x_i = x_{i+1}$, а все остальные координаты различны (более чем двойные столкновения мы для простоты отбросим). Уравнение $x_i = x_{i+1}$ задает гиперплоскость Π_i в $\mathbb{R}^N$; таким образом, точка $\boldsymbol{x}$ как-то отражается от плоскости Π_i. Ясно, что если $m_i = m_{i+1}$, то это отражение биллиардное, но при $m_i \neq m_{i+1}$ это уже не так. Плоскости $\Pi_1, \ldots, \Pi_{N-1}$ образуют стенки $(N-1)$-гранного угла в $\mathbb{R}^N$ (например, в $\mathbb{R}^3$ это двугранный угол, см. рис. 11), а часть Q пространства $\mathbb{R}^N$, задаваемая неравенствами

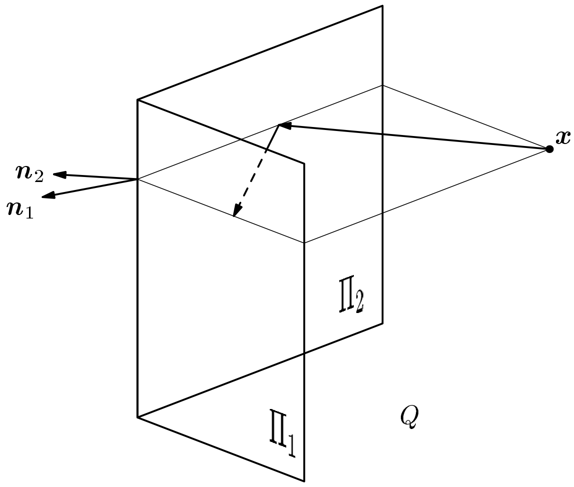


Рис. 11. *Конфигурационное пространство Q системы частиц на прямой — многогранный угол $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N$ в $\mathbb{R}^N$*

$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N$ — сам многогранный угол. Он и является конфигурационным пространством $Q \subset \mathbb{R}^N$ системы N частиц.

C. Конфигурационное пространство шаров

Пусть шары радиусов r_1 и r_2 столкнулись в пространстве $\mathbb{R}^n$, тогда

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 = (r_1 + r_2)^2, \tag{16}$$

где $O_1 = (x_1, \ldots, x_n)$ и $O_2 = (y_1, \ldots, y_n)$ — координаты центров шаров в момент столкновения. Равенство (16) задает $(2n-1)$-мерный цилиндр $Ц$ в $\mathbb{R}^{2n}$. Если заменить равенство в (16) на неравенство $<$, то получится *невозможное* расположение шаров в $\mathbb{R}^n$ и изображающая точка $(x_1, \ldots, x_n, y_!, \ldots, y_n)$ поэтому не может оказаться внутри цилиндра $Ц$. Однако она может попасть на поверхность цилиндра $Ц$, что отвечает столкновению шаров, а также летают вне цилиндра — тогда равенство (16) заменяется на неравенство $>$, и шары находятся на некотором расстоянии друг от друга.

Рассмотрим теперь N шаров в пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть шары $\#i$ и $\#k$ столкнулись. Для них тогда выполняется равенство (16) (в котором ко всем координатам x надо приписать индекс i, ко всем y — индекс k, а r_1, r_2 заменить на r_i, r_k), а для всех остальных шаров — неравенство $>$. В результате мы получаем конфигурационную точку $\boldsymbol{x}$ в пространстве $\mathbb{R}^{Nn}$, лежащую в множестве

$$C_{ij} = Ц_{ij} \times \mathbb{R}^{nN-2n}. \tag{17}$$

C_{ij} — это тоже цилиндр, но уже в пространстве $\mathbb{R}^{nN}$, и у него граница в направлениях, ортогональных подпространству $\mathbb{R}^{2n}$, в котором лежит цилиндр $Ц$, плоская. Положительную кривизну цилиндр C_{ij} имеет только вдоль цилиндра $Ц_{ij}$.

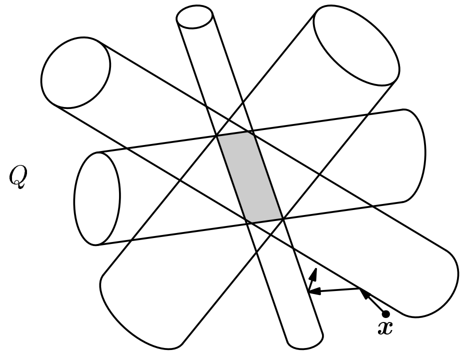


Рис. 12. *Конфигурационное пространство шаров* $Q \subset \mathbb{R}^{nN}$

Точка $\boldsymbol{x}$ не может лежать внутри цилиндра C_{ij}, поскольку шары непрозрачны. Так что $\boldsymbol{x}$ лежит вне всех цилиндров, число которых равно $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$, и поэтому конфигурационным пространством Q системы шаров является $\mathbb{R}^{nN}$ с выкинутыми внутренностями цилиндров (17):

$$Q = \mathbb{R}^{nN} - \left(\bigcup_{i \neq j} (\operatorname{int} C_{ij}) \right). \tag{18}$$

Важно отметить, что внутренности всех цилиндров C_{ij} — выпуклые тела, и что

$$\bigcap_{i \neq j} (\operatorname{int} C_{ij}) \neq \varnothing. \tag{19}$$

Действительно, невозможное положение для конфигурационной точки $\boldsymbol{x}$ такое, когда один или несколько шаров проникли друг в друга. В частности, если все шары имеют непустое пересечение в $\mathbb{R}^n$, то им отвечает невозможная точка в $\mathbb{R}^{nN}$, лежащая в пересечении внутренностей всех цилиндров $\operatorname{int} C_{ij}$. Поэтому пересечение внутренностей цилиндров непусто и является выпуклым множеством (как пересечение выпуклых множеств).

В результате получаем, что конфигурационное пространство Q — криволинейный многогранный угол (в силу (19)), у которого все стенки «вдавлены внутрь» Q (так как все цилиндры — выпуклы). Однако, как и в случае частиц на прямой, движение точки $\boldsymbol{x}$ в $Q \subset \mathbb{R}^{nN}$ будет биллиардным только если $m_i = m_j$, и не будет таковым при $m_i \neq m_j$ (рис. 12).

D. Редукция к биллиарду

Рассмотрим конфигурационное пространство $Q \subset \mathbb{R}^{nN}$ (частиц на прямой при $n = 1$, или шаров в пространстве $\mathbb{R}^n$). Сделаем следующее линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^{nN}$, которому также подвергнется как многогранный угол Q, так и траектория конфигурационной точки $\boldsymbol{x}$:

$$\tilde{x}_i = \sqrt{m_i} \cdot x_i, \qquad i = 1, \ldots, nN. \tag{20}$$

Иными словами, матрица A линейного оператора — диагональная, с числами $\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_N}$ по диагонали: $A = \operatorname{diag}(\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_N})$. Заметим, что скорость движения конфигурационной точки подвергнется тому же преобразованию:

$$\tilde{v}_i = \frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \sqrt{m_i}\frac{dx_i}{dt} = \sqrt{m_i}v_i. \tag{21}$$

Выбрав соответствующую единицу измерения, можно считать, что полная кинетическая энергия всех шаров (или частиц при $n = 1$) равна $E = 1/2$. Тогда скорость $\boldsymbol{v}(t) = (\sqrt{m_1}\vec{v}_1(t), \dots, \sqrt{m_N}\vec{v}_N(t)) = (\tilde{v}_1(t), \dots, \tilde{v}_{nN}(t))$ конфигурационной точки $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{nN})$ имеет модель 1:

$$|\boldsymbol{v}(t)|^2 = \sum_{i=1}^{Nn} |\tilde{v}_i(t)|^2 = 2E = 1. \tag{22}$$

Следовательно, длина вектора $\boldsymbol{v}(t)$ всегда постоянна и равна 1. Закон сохранения импульса (14) может быть переписан в виде

$$m_1v_1 + m_2v_2 = \sqrt{m_1}\tilde{v}_1 + \sqrt{m_2}\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix}\sqrt{m_1}\\ \sqrt{m_2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\tilde{v}_1\\ \tilde{v}_2\end{pmatrix} = |\vec{m}| \cdot |\vec{\tilde{\boldsymbol{v}}}| \cdot \cos\varphi = \text{const}, \tag{23}$$

где $\vec{m} = \begin{pmatrix}\sqrt{m_1}\\ \sqrt{m_2}\end{pmatrix}$, $\vec{\tilde{\boldsymbol{v}}} = \begin{pmatrix}\tilde{v}_1\\ \tilde{v}_2\end{pmatrix}$, а φ — угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{\tilde{\boldsymbol{v}}}$. Рассматривая столкновение только двух шаров, #1 и #2, и не меняя скоростей остальных шаров, получаем, что $|\vec{\tilde{\boldsymbol{v}}}| = 1$, $|\vec{m}| = \text{const}_1$, так что равенство (23) утверждает: *скалярное произведение двух постоянных по длине векторов не меняется после удара.* Значит, $\cos\varphi = \text{const}_2$, а так как угол φ должен изменяться после отражения, то он просто меняет знак. Это и означает, что точка $\tilde{\boldsymbol{x}}$ отражается от соответствующей стенки угла Q по биллиардному закону (подробное доказательство см. в [2, с. 164–165]). Редукция к биллиарду завершена.

Теперь мы можем приступить к краткому изложению идей доказательств.

1. «Малая» задача Синая

Теорема 1. *Число отражений любой биллиардной траектории в многогранном угле Q с плоскими стенками в $\mathbb{R}^n$ конечно; оно ограничено сверху некоторой константой C_1, зависящей только от геометрии угла.*

Доказательство. Приведем наглядное геометрическое доказательство, следуя [3]. Рассмотрим единичную сферу $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ с центром в вершине $\boldsymbol{q}$ многогранного угла и спроектируем этот угол на сферу из центра $\boldsymbol{q}$ (см. рис. 13a). Получим выпуклый сферический многогранник $\mathcal{P} \subset \mathbb{S}^{n-1}$. При центральной проекции биллиардная траектория γ частицы $\boldsymbol{x}$ в угле перейдет в биллиардную траекторию $\bar{\gamma}$ проекции $\boldsymbol{x}$ в многограннике $\mathcal{P}$ (в сферической метрике). Выпрямим траекторию γ в $\mathbb{R}^n$, отражая симметрично угол Q вместе с траекторией γ относительно тех его граней, от которых отражается биллиардная частица $\boldsymbol{x}$, движущаяся вдоль γ. Получим прямую ℓ в пространстве $\mathbb{R}^n$; ее проекция на сферу — половина большой окружности и имеет длину π (см. рис. 13b). Следовательно, биллиардная траектория $\bar{\gamma}$ частицы $\bar{\boldsymbol{x}}$ в $\mathcal{P}$ имеет конечную длину, равную π.

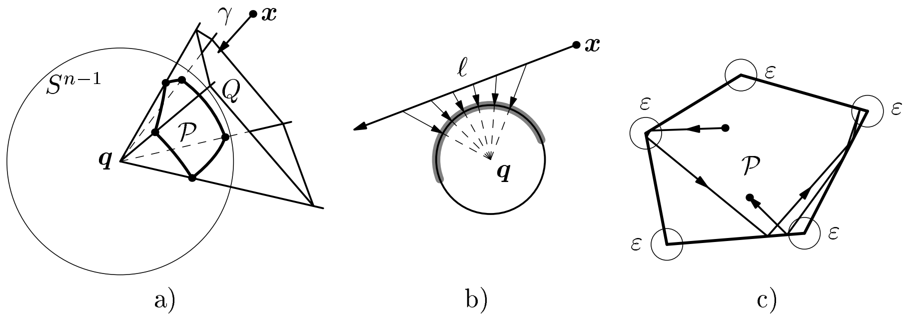


Рис. 13. *a) Центральная проекция $Q \to \mathcal{P}$; b) Проекция выпрямленной траектории на $\mathbb{S}^{n-1}$; c) траектория $\bar{\gamma}$ в $\mathcal{P}$*

Доказательство конечности числа отражений в Q проведем индукцией по размерности. Рассмотрим (см. рис. 13c) объединение ε-окрестностей всех граней $\mathcal{P}$, коразмерности которых не менее 2 (т. е. вершины, ребра и т. д., до граней размерности $n-2$). Внутри каждой такой ε-окрестности биллиардная траектория $\bar{\gamma}$ отражается от угла меньшей, чем n, размерности. Поэтому число отражений частицы $\boldsymbol{x}$, пока она находится в одной из ε-окрестностей, равномерно ограничено по предположению индукции. Уберем объединение всех этих ε-окрестностей; тогда объединение оставшихся частей граней $\mathcal{P}$ коразмерности 1 будет несвязно (оно состоит из объединения конечного числа кусков $(n-1)$-мерных граней), так что расстояние между любыми двумя такими частями отделено снизу от нуля некоторой константой C. Константа C зависит только от многогранника $\mathcal{P}$ и числа ε. Следовательно, частица $\bar{\boldsymbol{x}}$ может побывать в каждой из ε-окрестностей не более $\lceil \pi/C \rceil$ раз, поскольку общая длина траектории $\bar{\gamma}$ равна π.

Следовательно, частица $\boldsymbol{x}$ отразится от граней многогранника $\mathcal{P}$ конечное число раз, не превосходящее некоторой константы C_1, зависящей только от геометрии сферического многогранника $\mathcal{P}$. Значит, и число отражений частицы $\bar{\boldsymbol{x}}$ в многогранном угле Q также не превосходит C_1, причем C_1 зависит только от геометрии угла Q. Теорема 1 доказана.

Замечание. В работе Я. Г. Синая [10] доказательство ведется индукцией по размерности и от противного — явно выписывается некоторая константа, предполагается, что число ударов может ее превзойти, а затем получается противоречие.

В доказательстве М. Б. Севрюка в качестве функции, которая фигурирует в его лемме (см. II, 7.1), берется скалярное произведение скорости частицы с фиксированным вектором внутри угла Q (рис. 14).

Пусть O — вершина угла Q, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{v}^-$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{v}^+$, F — фиксированная точка внутри угла. Так как $\angle AO\Pi = \angle BO\Pi$ ($\boldsymbol{v}^+$ получается из $\boldsymbol{v}^-$ отражением относительно плоскости Π), то $\angle AOF > \angle BOF$, поэтому $f(B) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OF}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\angle BOF > |\overrightarrow{OF}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cos\angle AOF = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA}) = f(A)$, и линейная функция f возрастает после каждого отражения точки относительно грани угла Q. В силу леммы Севрюка, такое возрастание может происходить лишь конечное

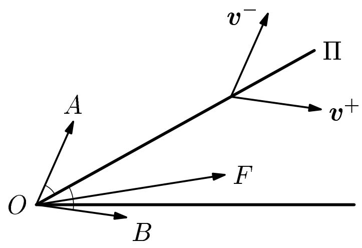


Рис. 14. *Функция $f(x) = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OF})$ возрастает при отражении от грани: $f(B) > f(A)$*

число раз, равномерно (по начальным условиям) ограниченное некоторой константой C_1, зависящей только от Q.

2. Частицы на прямой

Теорема 2. *(a) Максимальное число ударов в системе трех частиц m_1, m_2, m_3 задается формулой* (11).
(b) Число ударов в системе частиц с произвольными массами конечно.
(c) Число ударов в системе частиц с произвольными массами равномерно ограничено константой $C_1(m_1, \dots, m_n)$ по формуле (10).

Идеи доказательства. (a) Прежде всего, максимальное число $N(\alpha)$ отражений биллиардной частицы в угле величины α на плоскости равно $\lceil \pi\alpha \rceil$, если $\pi/\alpha \notin \mathbb{Z}$, и равно π/α, если $\pi/\alpha \in \mathbb{Z}$ (рис. 15). Конфигурационное пространство системы трех частиц — это двугранный угол $Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3\}$, или, после преобразования $A = \operatorname{diag}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$, двугранный угол $\tilde{Q} = \{(\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \tilde{\boldsymbol{x}}_2, \tilde{\boldsymbol{x}}_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{\tilde{\boldsymbol{x}}_1}{\sqrt{m_1}} \leqslant \frac{\tilde{\boldsymbol{x}}_2}{\sqrt{m_2}} \leqslant \frac{\tilde{\boldsymbol{x}}_3}{\sqrt{m_3}}\}$, в котором преобразованная траектория $\bar{\gamma}$ — биллиардная. Линейный угол α этого двугранного угла равен углу между единичными нормалями $\boldsymbol{n}_1 = (1/\sqrt{m_1}, -1/\sqrt{m_2}, 0)$ и

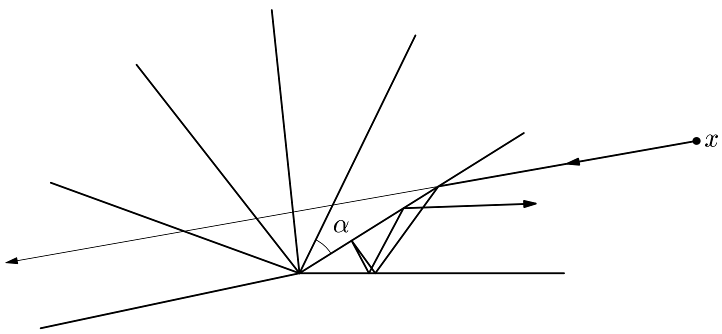


Рис. 15. *Выпрямление биллиардной траектории в угле α и неравенство $N(\alpha) < \frac{\pi}{\alpha} + 1$*

$\boldsymbol{n}_2 = (0, -1/\sqrt{m_2}, -1/\sqrt{m_3})$ к его граням (см. рис. 11). Поэтому

$$\alpha = \arccos \frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \arccos \frac{1/m_2}{\sqrt{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}}\sqrt{\dfrac{1}{m_2} + \dfrac{1}{m_3}}}.$$

Ортогональная проекция биллиардной траектории $\bar{\gamma}$ на плоскость, ортогональную граням угла $\bar{Q}$, также биллиардная в плоском угле α. Следовательно, максимальное число ее отражений равно $\lceil \pi/\alpha \rceil = C_1(m_1, m_2, m_3)$, где константа справа взята из формулы (11). Если $m_1 = m_2 = m_3 = m$, получаем $C_1(m_1, m_2, m_3) = 3$, как и должно быть для равных масс.

(b) Конечность числа ударов в системе частиц (без доказательства равномерной оценки) докажем от противного, индукцией по числу частиц. Для $n = 3$ утверждение доказано в пункте (a).

Предположим, что число ударов в системе с $n \geqslant 4$ частицами бесконечно. Допустим, что какие-то частицы i и $i+1$ сталкиваются лишь конечное число раз; тогда с какого-то момента t_0 столкновения между ними прекращаются, и вся система разбивается на две невзаимодействующие подсистемы: I = частицы $(1, 2, \ldots, i)$ и II = частицы $(i+1, i+2, \ldots, n)$. По предположению индукции число столкновений в каждой из подсистем I и II конечно, так что и во всей системе $\mathrm{I} \cup \mathrm{II}$ из n частиц число столкновений конечно. Получили противоречие с предположением.

Следовательно, *любые две частицы i и $i+1$ в исходной системе обязаны сталкиваться бесконечно много раз между собой*. Однако учтем, что каждая частица получает от частицы слева положительный импульс, а от частицы справа — отрицательный. Самая правая частица системы $\#n$ получает импульс только слева, поэтому ее импульс $p_n(t) = m_n v_n(t)$ увеличивается после каждого удара. Однако скорость частицы $v_n(t)$ ограничена сверху (это следует из $m_n v_n^2 \leqslant 2E$, где E — энергия всей системы). Поэтому функция $p_n(t)$ возрастающая и ограниченная. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел $p_n = \lim\limits_{t\to\infty} p_n(t)$.

Если рассмотреть систему частиц $(\#(n-1), \#n)$, то примерно тем же способом можно показать, что импульс ее центра масс — возрастающая и ограниченная по времени функция, а потому у нее также существует предел. Значит, существует предел и у функции $p_{n-1}(t) = m_{n-1} v_{n-1}(t)$ — импульса частицы $\#(n-1)$: $p_{n-1} = \lim\limits_{t\to\infty} p_{n-1}(t)$. Точно так же, рассматривая по очереди подсистемы частиц $(\#k, \#(k+1), \#(k+2), \ldots, \#(n-1), \#n)$, где $k = n-2, n-3, \ldots, 1$, можно доказать существование всех пределов $p_k = \lim\limits_{t\to\infty} p_k(t) = \lim\limits_{t\to\infty} m_k v_k(t)$.

В силу того, что между любыми двумя соседними частицами происходит бесконечно много ударов, нетрудно доказать, что предельные скорости всех частиц должны быть равными: $\lim\limits_{t\to\infty} v_1(t) = \ldots \lim\limits_{t\to\infty} v_n(t) = v$. Значит, скорость центра масс всей системы, $(m_1 v_1(0) + \ldots + m_n v_n(0))/(m_1 + \ldots + m_n)$ должна равняться v: *скорость каждой частицы стремится к скорости центра масс всей системы*.

Перейдем в инерциальную систему координат центра масс; в ней скорость центра масс равна нулю, так что скорость каждой частицы стремится к нулю в системе центра масс. Рассмотрим энергию всей системы — она также стремится к нулю! В силу закона сохранения энергии, начальная энергия также равна нулю; но каждое ее слагаемое $m_i v_i^2(0)/2$ неотрицательно; поэтому $v_i(0) = 0$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Мы получили, что в системе частиц вообще не было ударов!

Утверждение об отсутствии ударов мы получили, исходя из предположения о бесконечности числа ударов. Полученное противоречие доказывает, что число ударов конечно.

(c) здесь мы опишем только шаги доказательства, опуская детали (подробности см. в [2, 3]).

Перейдем в систему центра масс, который поместим в начало координат, т. е. будем считать, что

$$m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n = 0, \qquad m_1 v_1 + \ldots + m_n v_n = 0,$$

Закон сохранения энергии запишется в виде $\sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = 2E$, полная энергия. Снова обозначим через $p_i(t) = m_i v_i(t)$ импульс частицы i.

При k-м столкновении двух частиц импульс левой частицы уменьшается на величину $\Delta p_k > 0$, а правой — увеличивается на Δp_k. Число ударов в системе обозначим через K (оно конечно в силу (b)), так что $1 \leqslant k \leqslant K$.

Этап 1. $\Delta p_1 + \Delta p_1 + \ldots + \Delta p_K \leqslant 2\mathcal{P}_{\max}$, где $\mathcal{P}_{\max} = \max_{0 \leqslant t < \infty} \mathcal{P}(t)$, и

$$\mathcal{P}(t) = 1 \cdot p_1(t) + 2 \cdot p_2(t) + \ldots + n \cdot p_n(t) = \sum_{i=1}^n i \cdot p_i(t).$$

Легко показывается, что $\Delta \mathcal{P}_k \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P}(t_k + 0) - \mathcal{P}(t_k - 0) = \Delta p_k$, где t_k — момент k-го удара. Поэтому $\sum \Delta p_k \leqslant \mathcal{P}_{\max} - \mathcal{P}_{\min}$. Используя правило множителей Лагранжа, можно доказать, что

$$\mathcal{P}_{\max} = \sqrt{2E\left(M_2 - \frac{M_1^2}{M}\right)}, \tag{24}$$

где $M = \sum_{i=1}^n m_i$, $M_1 = \sum_{i=1}^n i \cdot m_i$, $M_2 = \sum_{i=1}^n i^2 \cdot m_i$.

Этап 2. На этом этапе вся ось времени разбивается на «быстрые промежутки», в каждом из которых какие-то два соседних шара ни разу не сталкиваются и имеют большую относительную скорость:

$$|v_i(t) - v_{i-1}(t)| \geqslant c_i$$

для всех t из соответствующего промежутка $[t_1, t_2]$.

Доказывается, что существует универсальный набор постоянных $c_1, \ldots, c_n$ (зависящих только от масс частиц и полной энергии системы), для которых вся ось времени покрывается быстрыми промежутками по всем парам $(i-1, i)$.

Этап 3. Число быстрых промежутков оценивается сверху числом

$$K = 8\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i}\right) \cdot \sqrt{M_2 M - M_1^2}.$$

Этап 4. На этом этапе число столкновений оценивается неравенством

$$C_1(m_1, \ldots, m_n \leqslant 2(2K)^{n-2},$$

где K — константа из этапа 3, после чего получается окончательная оценка (10).

3. «Большая» задача Синая и задача о шарах; часть (i)

Теорема 3. (a) *Число отражений биллиардной траектории γ в многомерном многогранном угле Q с вдавленными внутрь стенками («криволинейном угле») конечно на всем интервале времени* $(0, +\infty)$.

(b) *Число ударов в системе N произвольных твердых шаров в пространстве $\mathbb{R}^n$ конечно.*

Идеи доказательства. (a1) Прежде всего, и это самый важный момент в доказательстве, мы покажем, что *отражения не могут накапливаться на конечном интервале времени*, или, иными словами, множество отражений от стенок угла дискретно. Мы следуем доказательству [2].

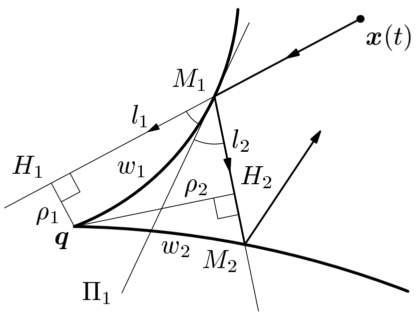


Рис. 16. *Расстояние от вершины угла $\boldsymbol{q}$ до прямой l_1 меньше расстояния от $\boldsymbol{q}$ до прямой l_2: $\rho_1 < \rho_2$*

Действительно, пусть моменты ударов накапливаются, тогда и точки, в которых происходят отражения в эти моменты, также накапливаются. Пусть $\boldsymbol{q}$ — точка накопления ударов; назовем ее вершиной угла (рис. 16). (Заметим, что многогранный угол может иметь много вершин — общих точек стенок; например, две трансверсальные стенки в $\mathbb{R}^3$ имеют целую кривую вершин. На рисунке для наглядности изображена двумерная картинка криволинейного угла с одной вершиной.)

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой момент t, что $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{q}) < \varepsilon$. Мы сейчас получим противоречие с этим неравенством, доказав, что $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{q})$ всегда больше некоторой константы r (зависящей от начального движения точки).

Пусть частица $\boldsymbol{x}$ летела вдоль луча l_1 до своего первого столкновения со стенкой w_1 в точке M_1. Затем она отразилась от стенки w_1 и полетела по лучу l_2 к стенке w_2. Вектор скорости движения точки $\boldsymbol{x}$ отразился симметрично относительно касательной плоскости Π_1 к стенке w_1 в точке M_1, и часть луча l_1 после точки M_1 отразилась в «зеркале» Π_1 и перешла в луч l_2. Заметим, что вся стенка w_1 — граница выпуклого тела. Следовательно, перпендикуляр $\boldsymbol{q}H_1$, опущенный из $\boldsymbol{q}$ на l_1, короче перпендикуляра $\boldsymbol{q}H_2$, опущенного из $\boldsymbol{q}$ на l_2 (ведь отрезок $\boldsymbol{q}H_2$ пересекает зеркало Π_1!):

$$|\boldsymbol{q}H_1| < |\boldsymbol{q}H_2|, \text{ или } \rho_1 < \rho_2. \tag{25}$$

Точно так же, после второго отражения — в точке M_2 от стенки w_2 — часть луча l_2 перейдет в симметричный относительно плоскости Π_2 луч l_3, и мы будем иметь по той же причине $\rho_2 < \rho_3$, и т. д.: *расстояние от вершины* $\boldsymbol{q}$ *до лучей движения биллиардной частицы* $\boldsymbol{x}(t)$ *после каждого отражения строго возрастает*: $r = \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \ldots$. Поскольку наклонная длиннее перпендикуляра, $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{q}) > \rho_1$. Следовательно, при $\varepsilon < \rho_1$ мы получаем противоречие. Отметим, что при доказательстве мы использовали тот факт, что точка $\boldsymbol{x}$ приближается к $\boldsymbol{q}$.

Итак, мы доказали, что *на любом конечном интервале времени число отражений конечно*. Более того, можно показать (см. [2, с. 168–169]), что $\boldsymbol{x}(t)$ будет приближаться к вершине $\boldsymbol{q}$ время, меньшее ρ_1. Как мы отмечали выше (раздел II.3), именно этот факт играет ключевую роль в доказательстве эргодичности системы молекул газа.

(а2) Интересно, что на плоскости даже для нулевого угла можно дать верхнюю оценку числа отражений (зависящую от начального положения точки $\boldsymbol{x}$), см. рис. 17.

Утверждение 1. *Пусть* φ *— угол первого отражения биллиардной точки* $\boldsymbol{x}(t)$ *от стороны криволинейного угла с вершиной* $\boldsymbol{q}$ *и* α *— угол между касательными к сторонам угла в точках* A *и* B *пересечения окружности радиуса* $r = \rho_1$ *с центром* $\boldsymbol{q}$ *(см. рис. 17). Тогда число отражений частицы от сторон угла*

$$N(\varphi, \alpha) \leqslant \frac{2\varphi}{\alpha}\,. \tag{26}$$

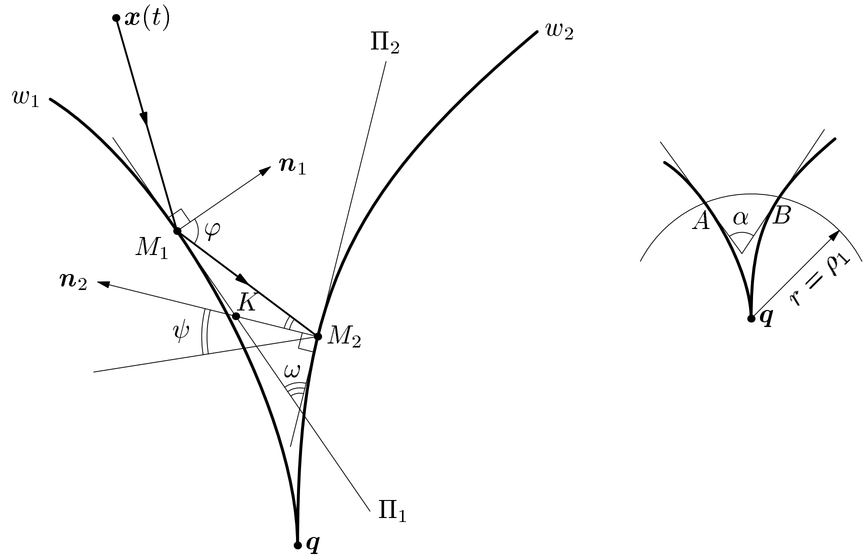


Рис. 17. $\psi = \varphi - \omega$, $\omega \geqslant \alpha$

Следствие. *Если криволинейный угол — ненулевой и вмещает в себя угол* α, *то наибольшее число отражений от сторон этого угла* $\leqslant \dfrac{\pi}{\alpha} + 1$.

Из рис. 17 видно, что два внутренних угла $\triangle M_1KM_2$ равны $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$ и ψ, а внешний угол в вершине K равен $\dfrac{\pi}{2} - \omega$ (ω — угол между касательными Π_1 и Π_2 в точках M_1 и M_2). Следовательно, $\dfrac{\pi}{2} - \omega = \left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) + \psi$, откуда $\psi = \varphi - \omega$. Но $\omega \geqslant \alpha$, поэтому $\psi \leqslant \varphi - \alpha$.

Значит, угол отражения каждый раз уменьшается по крайней мере на α:

$$\psi_1 \leqslant \varphi - \alpha;\ \psi_2 \leqslant \psi_1 - \alpha \leqslant \varphi - 2\alpha;\ \ldots\ \psi_n \leqslant \varphi - n\alpha;\ \ldots$$

Отсюда, поскольку $0 \leqslant \psi_n \leqslant \psi_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \psi_1$ при приближении точки $\boldsymbol{x}$ к вершине $\boldsymbol{q}$, получаем, что $n\alpha \leqslant \varphi$ и $n \leqslant \varphi/\alpha$. Итак, частица отражается не более φ/α раз при ее приближении к вершине $\boldsymbol{q}$.

Затем она удаляется от $\boldsymbol{q}$. Можно считать, в силу обратимости движения во времени, что при удалении от $\boldsymbol{q}$ точка $\boldsymbol{x}$ отразится от сторон w_1 и w_2 не более того числа раз, которое она отразилась при приближении к $\boldsymbol{q}$. Поэтому общее число отражений $\leqslant 2\varphi/\alpha$.

Так как $\varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то $N(\varphi, \alpha) \leqslant \dfrac{\pi}{\alpha}$, b следствие вытекает немедленно.

(a3) Нам осталось доказать, что в последовательности отражений от сторон *многомерного* криволинейного угла наступит последнее отражение. Мы следуем одному из пунктов доказательства в [20].

Пусть $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$ — моменты отражений. Рассмотрим треугольники $\Delta_1 = \boldsymbol{x}(t_0)\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}(t_1)$, $\Delta_2 = \boldsymbol{x}(t_1)\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}(t_2), \ldots, \Delta_k = \boldsymbol{x}(t_{k-1})\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}(t_k), \ldots$, вырежем их ножницами из бумаги и расположим на (двумерной!) плоскости так, чтобы Δ_k и Δ_{k+1} примыкали по общей стороне $\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}(t_k)$ и не перекрывались (рис. 18). Иными словами, сделаем плоскую развертку «гармошки» треугольников $\{\Delta_k\}_1^\infty$, расположенных в пространстве $\mathbb{R}^n$ и примыкающих по общим сторонам $\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}(t_k)$.

Оказывается, для каждого $k \geqslant 1$ угол $\angle\boldsymbol{x}(t_0)\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}(t_k)$ строго меньше π: $\gamma_1 + {} + \gamma_2 + \ldots \leqslant \pi$ (рис. 18). Это вытекает из выпуклости стенок угла.

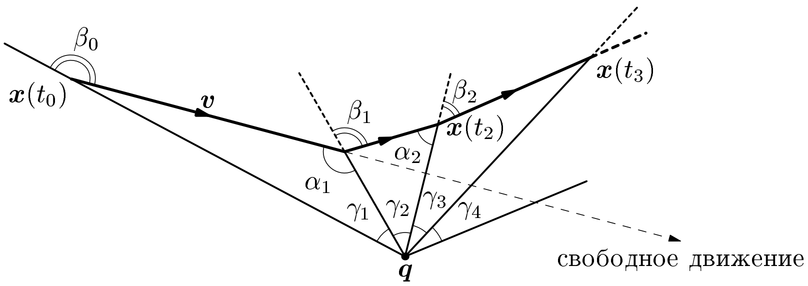


Рис. 18. *Развертка цепочки треугольников на плоскость*

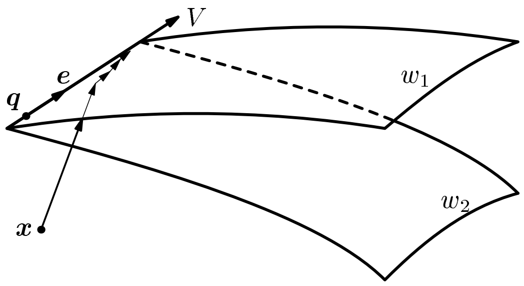


Рис. 19. *Луч V вдоль $\boldsymbol{e}$ лежит в пересечении всех стенок $W = \bigcap W_i$ и частица $\boldsymbol{x}$ приближается к нему*

Отсюда следует существование предельного единичного вектора

$$\boldsymbol{e} = \lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{q}|} = \lim_{t\to\infty} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{qx}(t)}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{qx}(t)}|}\,, \tag{27}$$

если предположить, что число ударов бесконечно. Возьмем стенку угла W, частица отразится от нее бесконечно много раз, а так как $|\overrightarrow{\boldsymbol{qx}(t)}| \to \infty$, мы получаем, что стенка W содержит целиком луч V, выходящий из $\boldsymbol{q}$ в направлении $\boldsymbol{e}$. Так как это верно для любой стенки угла Q, луч V лежит в пересечении $\bigcap_{i=1}^N W_i$ всех стенок угла (рис. 19). Развертка треугольников позволяет также доказать тот факт, что функция $d(t) = \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}(t), \bigcap W_i)$ выпукла по t. Мы хотим доказать, что при всех $t > t_0$ $d(t)$ — линейная функция. Если число ударов бесконечно, то найдутся такие положительные константы $\varepsilon > 0$ и $c > 0$, что

$$d(t) \geqslant \varepsilon t - c \text{ при всех } t.$$

Далее, $\dfrac{\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}(t), V)}{|\overrightarrow{\boldsymbol{qx}(t)}|} \to 0$ при $t \to \infty$. Однако

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}(t), V) \geqslant \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}(t), \bigcap W_i) = d(t) \geqslant \varepsilon t - c,$$
$$|\overrightarrow{\boldsymbol{qx}(t)}| \leqslant |\overrightarrow{\boldsymbol{qx}(0)}| + |\overrightarrow{\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{x}(t)}| \leqslant |\overrightarrow{\boldsymbol{qx}(0)}| + t$$

(мы заменили $|\overrightarrow{\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{x}(t)}|$ на t, так как частица движется вдоль траектории от $\boldsymbol{x}(0)$ до $\boldsymbol{x}(t)$ со скоростью 1). Поэтому

$$\frac{\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}(t), V)}{|\overrightarrow{\boldsymbol{qx}(t)}|} \geqslant \frac{\varepsilon t - c}{|\overrightarrow{\boldsymbol{qx}(0)}| + t} \to \varepsilon > 0 \text{ при } t \to \infty,$$

и левая часть неравенства не стремится к 0 — противоречие.

Переходим к доказательству пункта (b).

(b). Выше мы сделали редукцию системы шаров к биллиарду в криволинейном угле. Поэтому утверждение о шарах есть следствие пункта (a).

Приведем еще одну идею, близкую к идее доказательства про частицы (см. подробности в [2]). Из (a1) следует, что в любом *конечном* интервале времени число ударов в системе шаров конечно. Как и при доказательстве теоремы 2(b), закончить доказательство про систему шаров можно так. Если на интервале $(0, +\infty)$

число ударов в системе бесконечно, то вся система с какого-то момента T_0 разбивается на группы (кластеры), в каждой из которых любой шар испытывает бесконечное число ударов от шаров того же кластера, а сами кластеры никак не взаимодействуют друг с другом: их центры масс движутся в пространстве равномерно и прямолинейно. Рассмотрим один кластер и перейдем в систему его центра масс.

Как и в случае частиц, можно доказать, что скорости всех шаров стремятся к скорости центра масс, т. е. к 0. А тогда энергия $E(t)$ кластера также стремится к 0. Но она постоянна во времени при $t > T_0$, так что $E(t) \equiv 0$. Значит, шары в кластере вообще не двигались с момента T_0. Получили противоречие с бесконечностью числа ударов в кластере.

Следовательно, число ударов в системе может быть только конечным, что и требовалось доказать.

4. «Большая» задача Синая и задача о шарах; часть (ii)

Теорема 4. (a) *Число отражений биллиардной траектории γ в многомерном криволинейном многогранном угле Q с вдавленными внутрь стенками, на который наложено условие невырожденности [12], не превосходит некоторой константы C_2, зависящей только от геометрии угла Q.*

(b) *Число ударов в системе N шаров в $\mathbb{R}^n$ с массами $M_1, \ldots, m_N$ не превосходит константы $C_2(m_1, \ldots, m_n)$, определяемой равенством* (13), *какими бы ни были начальные положения и скорости шаров, а также их радиусы $r_1, \ldots, r_N$.*

Идеи доказательств. (a) Доказательство существования равномерной по начальным условиям константы C_2 ведется индукцией по числу стенок в угле Q. Оно основано на леммах, сформулированных ниже.

Сначала определение. Обозначим конечный кусок *биллиардной* траектории, выходящей из точки X и заканчивающейся в точке Y, через $\Gamma(X, Y)$. Назовем *кодом* этого куска последовательность стенок $w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}$, от которых происходили отражения траектории $\Gamma(X, Y)$. Мы скажем, что другая ломаная $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, начинающаяся в точке $X = \gamma(0)$ и кончающаяся в точке $Y = \gamma(1)$, имеет тот же самый *комбинаторный* тип, что и биллиардная ломаная $\Gamma(X, Y)$, если она отражается от тех же стенок в том же порядке, т. е. существуют моменты $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant 1$, в которые $\gamma(t_j) \in W_j$.

Важное замечание: указанные неравенства — нестрогие, так что вместо отражения от стенки W_i, а потом от W_j, ломаная может попасть сразу на пересечение $W_i \cap W_j$. В частности, если взять какую-нибудь вершину угла $\boldsymbol{q} \in \bigcap_{i=1}^{N} W_i$ (т. е. одну из точек на пересечении всех стенок угла), то двузвенная ломаная $X\boldsymbol{q}Y$ имеет тот же комбинаторный тип, что и траектория $\Gamma(X, Y)$.

Лемма 1 (comparison lemma). *Биллиардная траектория $\Gamma(X, Y)$ короче любой ломаной $\gamma(t)$ того же комбинаторного типа в угле Qв выпуклыми внутрь стенками.*

Напомним, как обычно доказывается эта лемма для многогранного угла с плоскими стенками. См. рис. 15: мы выпрямляем траекторию, отражая угол Q относительно граней отражения траектории, и получаем отрезок прямой между

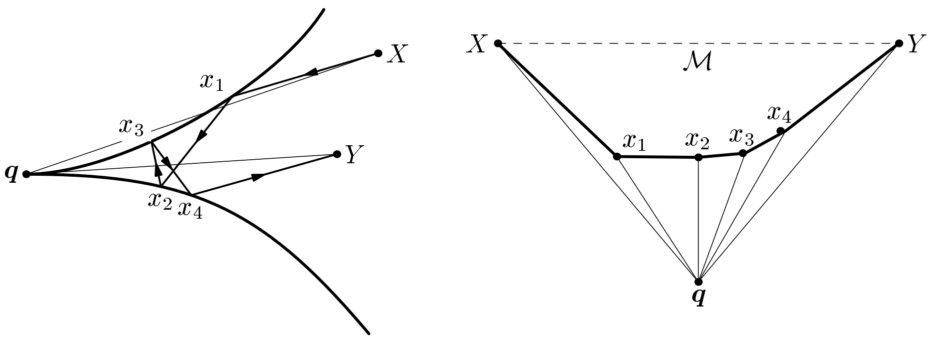


Рис. 20. *Доказательство леммы 2: периметр многоугольника $\mathcal{M}$ меньше периметра $_\triangle X\boldsymbol{q}Y$*

начальной и конечной точками. А он, конечно, короче любой ломаной с теми же концами. Для криволинейного угла идея та же: *выпрямление траектории*. Только осуществить ее следует чуть иначе.

Возьмем столько копий криволинейного угла Q, сколько имеется звеньев у траектории $\Gamma(X, Y)$ (т. е. на 2 больше числа точек излома траектории), и начнем их приклеивать одну к другой последовательно по стенкам W_{i_j}, от которых происходили отражения, следуя коду ломаной $\Gamma(X, Y)$. Тогда на развертке или «гармошке» копий $Q_1, Q_2, \ldots$, полученной в результате такого склеивания (в «высокой» математике «гармошка» называется обобщенным римановым, или александровским, пространством), траектория $\Gamma(X, Y)$ «распрямляется» и будет *кратчайшей* (геодезической) кривой между двумя фиксированными точками — X (в первой копии гармошки) и Y (в последней копии). Отсюда и следует лемма 1: любая другая ломаная длиннее геодезической (см. подробности в [12]).

Приведем удивительное, на первый взгляд, утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\boldsymbol{q}$ — вершина криволинейного угла Q ($\boldsymbol{q} \in \bigcap_{i=1}^{N} W_i$), и $\Gamma(X, Y)$ — конечный кусок биллиардной траектории общей длины $|\Gamma(X, Y)|$. Тогда $|\boldsymbol{q}X| + |\boldsymbol{q}Y| > |\Gamma(X, Y)|$ (рис. 20).*

Как и на последнем этапе доказательства «малой» теоремы Синая, вырежем из бумаги треугольники $_\triangle \boldsymbol{q}Xx_1$, $_\triangle \boldsymbol{q}x_1x_2$, $_\triangle \boldsymbol{q}x_2x_3, \ldots, {}_\triangle \boldsymbol{q}x_kY$ и склеим их по общим сторонам без перекрытий. Получим плоскую развертку «гармошки» тех же треугольников, расположенных в пространстве $\mathbb{R}^n$ (рис. 18).

В силу выпуклости стенок W_i и закона «угол падения равен углу отражения» легко показать, что ломаная $\gamma(X, Y) = Xx_1x_2x_3 \ldots x_k, Y$ на плоскости *выпукла*: любая прямая Xx_1, x_1x_2, $\ldots$, x_kY делит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых находится вся ломаная $\gamma(X, Y)$, а в другой — точка $\boldsymbol{q}$. При этом длина плоской ломаной $\gamma(X, Y)$ равна длине пространственной биллиардной траектории: $|\gamma(X, Y)| = |\Gamma(X, Y)|$. (Для угла с плоскими стенками ломаная $\gamma(X, Y)$ представляет собой отрезок прямой).

Соединим отрезком точки X и Y ломаной $\gamma(X,Y)$ (фигура справа на рис. 20). Тогда многоугольник $\mathcal{M} = Xx_1\dots x_kY$ — выпуклый, и он находится внутри треугольника ${}_\triangle X\boldsymbol{q}Y$, который также выпуклая фигура на плоскости. По известной теореме элементарной геометрии о вложенных выпуклых многоугольниках заключаем, что периметр ${}_\triangle X\boldsymbol{q}Y$ больше периметра $\mathcal{M}$. Вычитая длину отрезка XY, получаем $|\boldsymbol{q}X| + |\boldsymbol{q}Y| > |\gamma(X,Y)|$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3 (техническая лемма). *Для любых четырех точек* $A,B,C,D \in \mathbb{R}^n$, *если* $\dfrac{\operatorname{dist}(C,AB)}{|CD|} \geqslant c > 0$, *то*

$$\frac{(|AD|+|DB|)-(|AC|+|CB|)}{|AC|+|CB|-|AB|} \leqslant K = K(c), \ \text{где } K(c) = 16\left(\frac{1}{c}+1\right)^2.$$

Доказательство леммы 3 основывается на рассмотрении различных случаев расположения точек в $\mathbb{R}^n$ (см. [12]) и мы его опускаем.

Доказательство теоремы 4(a) основывается на так называемой «процедуре укорачивания траектории Γ» с привлечением лемм 1, 2 и 3. Она состоит из попеременной замены куска биллиардной траектории $\Gamma(X_1,X_2)$, где X_1 и X_2 — точки отражения от одной и той же стенки W_i угла Q, на
(1) двузвенную ломаную — объединение двух отрезков $X_1D \cup DX_2$, где D — точка на пересечении всех стенок $\bigcap_{i=1}^N W_i$, ближайшая к заранее выбранной точке Z траектории Γ; или
(2) отрезок X_1X_2.

При этом точка Z траектории Γ предшествует точке X_2 и следует за точкой X_1 на Γ, и выполнено соотношение

$$\frac{\operatorname{dist}(Z,W_i)}{\operatorname{dist}(Z,\bigcap_{i=1}^N W_i} \geqslant C, \tag{28}$$

где константа C взята из определения невырожденного угла Q (см. условие d/c-близости и рис. 9).
(1) Замену $\Gamma(X_1,X_2)$ на $X_1D \cup DX_2$ назовем «растяжением» траектории Γ и обозначим

$$(|X_1D| + |DX_2) - (|X_1Z| + |ZX_1|) = s;$$

s зависит от точек X_1, X_2 и Z.
(2) Замену $\Gamma(X_1,X_2)$ на X_1X_2 назовем «сжатием» траектории и обозначим

$$|X_1Z| + |ZX_2| - |X_1X_2| = p.$$

Тогда по лемме 3

$$s \leqslant K(c)\cdot p, \quad K(c) = 16\left(\frac{1}{c}+1\right)^2. \tag{29}$$

Лемма 4. *Число попарно различных конечных кусков траекторий* $\Gamma(A,B)$ *биллиардной траектории* Γ, *отражающихся от всех* N *стенок угла* Q *и не имеющих общих точек (кроме, возможно, общих концов), не превосходит* $L = 2K(c)+1$, *где* $K(c)$ *— константа из леммы 3. Такие куски авторы [12] называют циклами.*

Доказательство леммы 4 авторы получают от противного противоречием с леммами 1 и 2.

Дадим теперь краткое доказательство теоремы 4(a). Пусть при всех $k < N$ любая траектория, отражающаяся от $\leqslant k$ стенок W_i, имеет $\leqslant M_k$ отражений в угле Q. По предположению индукции, каждый кусок траектории с $\leqslant M_{N-1}$ отражениями содержит цикл. По лемме 4 число циклов $\leqslant L$; следовательно всего отражений в угле Q может быть $\leqslant M_N$, где $M_N = L(M_{N-1}+1) \leqslant 2LM_{N-1}$. Поскольку $M_1 = 1$ (одно отражение от стенки), получаем

$$M_n \leqslant (2L)^{N-1} = (2K(C)+4)^{N-1} = \left(2\cdot 16\left(\frac{1}{C}+1\right)^2+4\right)^{N-1} < \\ < \left[16\left(\frac{1}{C}+2\right)\right]^{2(N-1)}. \quad (30)$$

Таким образом, константу C_2 в теореме 4 можно положить равной

$$C_2 = \left[16\left(\frac{1}{C}+2\right)\right]^{2(N-1)}, \quad (31)$$

где C — константа в условии невырожденности угла Q и N — число стенок угла.

(b) Для доказательства существования равномерной оценки для числа ударов N шаров надо прежде всего проверить условия невырожденности биллиарда, образованного выкидыванием из $\mathbb{R}^{nN}$ $\frac{N(N-1)}{2}$ цилиндров C_{ij} (см. формулы (17) и (18)). Положим $m_{\min} = 1$, $r_{min} = 1$.

Идея состоит в том, чтобы следить за движениями шаров в $\mathbb{R}^n$, если двигать конфигурационную точку $\boldsymbol{x}$ к каждой из стенок $W_{ij} = C_{ij}$ специальным образом, а также если двигать $\boldsymbol{x}$ к пересечению всех стенок специальным образом. Оказывается, расстояние от $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{nN}$ до C_{ij} в метрике $\|\{x_{ij}\}\}^2 = \frac{1}{2E}\sum_{i,j} m_i x_{ij}^2 = = \frac{1}{2E}\sum_{i,j} m_i |c_i|^2$, где $c_i = \{x_{ij}\} \in \mathbb{R}^n$ — центры шаров, E — энергия системы, не превосходит некоторой константы (зависящей от энергии E системы шаров), умноженной на расстояние между шарами i и j в $\mathbb{R}^n$. А именно, возьмем какую-нибудь группу шаров I, все пары шаров из группы I, и соответствующие им цилиндры C_{ij}.

Пусть d_{ij} — расстояние между центрами шаров i и j, r_i, r_j — их радиусы и $\delta_{ij} = d_{ij} - r_i - r_j \geqslant 0$. Рассмотрим максимум всех δ_{ij} и обозначим $\delta = \delta_{i_1 j_1} - \max_{i,j\in I}\delta_{ij}$. Можно показать, что $\max_{C_{ij}\in I}\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, C_{ij}) \geqslant \frac{\delta}{2\sqrt{2E}}$, и что

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \bigcap_{i,j\in I} C_{ij}) \leqslant \frac{N\cdot r_{\max}\delta\sqrt{m_{\max}N}}{\sqrt{2E}}.$$

Поэтому отношение левых частей дает значение константы невырожденности для группы I:

$$C_{I,\mathbb{R}^{nN}}(\boldsymbol{x}) \geqslant \frac{1}{2r_{\max}\cdot N\sqrt{m_{\max}N}}.$$

Так как правая часть неравенства не зависит ни от $\boldsymbol{x}$, ни от группы I, получаем универсальную константу невырожденности

$$C = \frac{1}{2r_{\max}N^{3/2}m_{\max}^{1/2}}\,. \tag{32}$$

Подставляя ее в формулу (31), находим, что число ударов в системе шаров не превосходит

$$\left(16\cdot 2r_{\max}N^{3/2}\sqrt{m_{\max}}\right)^{2\cdot\left(\frac{N(N-1)}{2}-1\right)} < \left(32r_{\max}\cdot N^{3/2}\sqrt{m_{\max}}\right)^{N^2}.$$

Пока что получилась оценка (12), включающая радиусы шаров (напомним, что $m_{\min}=1$ и $r_{\min}=1$, так что, если отбросить эти условия, мы должны писать везде отношения $m_{\max}/m_{\min}$ и $r_{\max}/r_{\min}$.

Однако шары можно двигать в $\mathbb{R}^n$ несколько хитрее. Выберем опять некоторое множество стенок I.

Возьмем точку $\boldsymbol{x}_0\in Q=\mathbb{R}^{nN}\setminus\left(\bigcup_{(ij)\in I}C_{ij}\right)$ и найдем максимальное расстояние в $\mathbb{R}^{nN}$ от $\boldsymbol{x}_0$ до стенок (цилиндров) из множества I: $\delta=\max_{(ij)\in I}\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_0,C_{ij})$. Оценим теперь расстояние $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_0,\bigcap_{(ij)\in I}C_{ij})$ через δ. Начнем двигать точку $\boldsymbol{x}(0)$ в $\mathbb{R}^{nN}$ так. Обозначим $I_0=\{i\mid C_{ij}\in I\}$. Возьмем какое-то $i_1\in I_0$ и все шары с номерами $k\in I_0\setminus\{i\}$ запустим одновременно с постоянной скоростью вдоль прямых, соединяющих их центры с центром шара i_1, пока каждая пара шаров (k,i_1) не соприкоснется (как только соприкосновение произойдет, конфигурационная точка попадет на цилиндр C_{i_1k}). В момент, когда шар $\#k$ коснется шара $\#i_1$, шар $\#k$ прекращает движение, а остальные еще не соприкоснувшиеся шары продолжают равномерно двигаться к шару $\#i_1$. Конфигурационная точка $\boldsymbol{x}(t)$ сначала попадает на один из цилиндров вида $C_{i_1j_1}$, потом двигается по нему и попадает на другой цилиндр группы I вида $C_{i_1j_2}$ (теперь она на пересечении двух цилиндров), потом двигается и попадает на третий цилиндр группы I вида $C_{i_1j_3}$, и т. д. пока последний шар из группы I не остановится, соприкоснувшись с шаром $\#i_1$. В этот момент конфигурационная точка находится в некоторой точке $\boldsymbol{x}_1\in\mathbb{R}^{nN}$. Так как при каждом движении $\boldsymbol{x}_0(t)$ происходил сдвиг на $\leqslant\delta$, а движений было $\leqslant N$ (N — число шаров в системе), то $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1)\leqslant m_{\max}\cdot N\delta$. Напомним, что «биллиардная» метрика в $\mathbb{R}^{nN}$ задается равенством

$$\operatorname{dist}\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}m_i\cdot\operatorname{dist}(x_i,y_i)^2},$$

откуда и появляется множитель $m_{\max}$.

Так как все шары двигались *равномерно* вдоль прямых в $\mathbb{R}^n$, направленных в одну точку — центр шара $\#i_1$, расстояние между каждой парой шаров уменьшалось; следовательно, для новой точки $\boldsymbol{x}_1$ $\max_{(i,j)\in I}\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_1,C_{ij})\leqslant\delta$.

Теперь возьмем другой номер $i_2\in I_0\setminus\{i_1\}$ и, начав с с $\boldsymbol{x}_1$, тем же способом найдем новую точку $\boldsymbol{x}_2\in\mathbb{R}^{nN}$, такую, что $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\leqslant m_{\max}\cdot N\delta$; затем третью точку $\boldsymbol{x}_3$ с тем же свойством и т. д., пока не исчерпаем всех шаров из множества I_0. По построению, последняя конфигурационная точка $\boldsymbol{x}_{|I_0|}$ принадлежит пересечению $\bigcap_{(ij)\in I} C_{ij}$ всех цилиндров из множества I. Значит,

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_{|I_0|}) \leqslant \sum_{i=1}^{|i_0|-1} \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}) \leqslant m_{\max} \cdot N^2\delta. \tag{33}$$

Значит, *выполнено свойство невырожденности с константой* $C = \dfrac{1}{m_{\max}N^2}$ (для этого надо поделить δ на правую часть неравенства (33) и поменять знак неравенства на «$\geqslant$», как и должно быть в определении невырожденности: см. рис. 9).

Отметим также, что биллиардный стол $Q = \mathbb{R}^{nN} \setminus \left(\bigcup_{i\neq j} C_{ij}\right)$ состоит из большого числа криволинейных многогранных углов $\{Q_s\}$ (с двумя, тремя, …, $\frac{N(N-1)}{2}$ стенками), и мы должны оценку (31), которая справедлива лишь в шаре определенного радиуса, внутри которого отражения происходят только от стенок одного из углов $\{Q_s\}$, превратить в глобальную оценку на всем столе Q. Авторы [12] находят такую глобальную оценку: число ударов в Q не превосходит

$$\left(200\left(\frac{1}{C}+2\right)\right)^{2N^4}; \tag{34}$$

подставляя $C = \dfrac{1}{m_{\max}N^2}$, получаем заведомо завышенную оценку

$$\left(200(m_{\max}N^2+2)\right)^{2N^4} \leqslant \left(400N^2 m_{\max}\right)^{2N^4}, \tag{35}$$

которая совпадает с (13), если вспомнить, что у нас $m_{\min} = 1$.

В заключение приведем теорему о газе в сосуде.

Теорема 5. *Для любого невырожденного полурассеивающего биллиарда (с выпуклыми внутрь стенками) существует такая константа $C > 0$, зависящая только от геометрии стола, что биллиардная частица за время t отразится от его стенок $\leqslant Ct$ раз. В частности, эта же оценка справедлива для разряженной системы системы молекул (шариков) в сосуде, стенки которого плоские или выпуклы внутрь сосуда.*

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 4.

Список литературы

[1] *Гальперин Г. А.* Упругие столкновения частиц на прямой // УМН, 1978. Т. 33. Вып. 1. С. 211–212.

[2] *Гальперин Г. А.* О системах локально взаимодействующих и отталкивающихся частиц, движущихся в пространстве // Труды Московского Математического Общества. Т. 43. М.: МГУ, 1981. С. 142–196.

[3] *Гальперин Г. А., Земляков А. Н.* Математические биллиарды. М.: Наука, 1990.

[4] *Гальперин Г. А., Чернов Н. И.* Биллирады и хаос // Серия «Математика, кибернетика», №5. М.: Знание, 1991.

[5] *Земляков А. Н.* Геометрия и арифметика столкновений // Квант, 1978. №4. С. 14–21.

[6] *Полак Л. С.* Людвиг Больцман (1844–1906). М.: Наука, 1987.

[7] *Севрюк М. Б.* К оценке числа столкновений n упругих частиц на прямой. Институт Энергетических Проблем Хим. Физики РАН, 1992.

[8] *Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих биллиардов // УМН, 1970. Т. 25. С. 144–192.

[9] *Синай Я. Г.* Равномерная верхняя оценка для числа упругих ударов в системе одинаковых твердых шаров в пространстве. Рукопись, ~1965.

[10] *Синай Я. Г.* Биллиардные траектории в многогранном угле // УМН, 1978. Т. 33. Вып. 1. С. 229–230.

[11] *Хованский А. Н.* Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: Мир, 1956.

[12] *Burago D., Kanonenko A., Ferleger S.* Uniform estimates on the number of collisions in semi-dispersing billiards // Annals of Mathematics, 1998. V. 147. P. 695-708.

[13] *Burago D., Kanonenko A., Ferleger S.* A geometric approach to semi-dispersing billiards // Ergodic Th.& Dyn. Syst., 1998. V. 18. P. 303–319.

[14] *Cohen E. G. D.* // Lectures in Theoretical Physics, VIII A. Univ. of Colorado Press, 1966. P. 167.

[15] *Illner R.* Finiteness of the number o collisions in a hard sphere particle systems in all space // Transport Theory Statist. Physics, 1990. V. 19. P. 573–579.

[16] *Murphy T. J., Cohen E. G. D.* Maximum number of collisions among identical hard spheres // J. Stat. Physics, 1993. V. 71. P. 1063–1080.

[17] *Rehacek J.* On the ergodicity of dispersing billiards // Random&Computational Dymamics, 1995. Vol. 3(1&2). P. 35–55.

[18] *Sandri G., Sullivan R. D., Norem P.* Collisions of three hard spheres // Physical Review Letters, 1964. V. 13. No 25. P. 743–745.

[19] *Turston W., Sandri G.* Classical hard sphere 3-body problem // Bull. Amer. Phys. Soc., 1969. V. 9. P. 386.

[20] *Vaserstein L. N.* On systems of particles with finite-range and/or repulsive interactions // Comm. Math, Physics, 1979. V. 69. P. 31–56/